MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

87. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J. BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR V. KÁRMÁN, CARL NEUMANN, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN
IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN.

87. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Inhalt des siebenundachtzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Additive Theorie der Zahlkörper. I.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen[1]).

Die analytische Methode, welche Hardy, Littlewood und Ramanujan[2]) für die Untersuchung vieler Fragestellungen der „partitio numerorum"

[1]) Diese Arbeit ist ein Abdruck meiner Göttinger Habilitationsschrift.

[2]) Vgl. die Arbeiten:

G. H. Hardy, Asymptotic formulae in combinatory analysis; Comptes rendus du quatrième congrès des mathématiciens scandinaves à Stockholm (1916), S. 45–53.

— On the expression of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven; Proceedings of the National Academy of Sciences **4** (1918), S. 189–193.

— On the representation of a number as the sum of any number of squares and in particular of five; Transactions of the American Mathematical Society **21** (1920), S. 255–284.

G. H. Hardy und S. Ramanujan, Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n; Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **164** (1917), S. 35–38.

— Asymptotic formulae in combinatory analysis; Proceedings of the London Mathematical Society (2) **17** (1918), S. 75–115.

— On the coefficients in the expansions of certain modular functions; Proceedings of the Royal Society, London, A **95** (1918), S. 144–155.

S. Ramanujan, On certain trigonometrical sums and their application in the theory of numbers; Transactions of the Cambridge Philosophical Society **22** (1918), S. 259–276.

G. H. Hardy und J. E. Littlewood, A new solution of Waring's problem; Quarterly Journal of Mathematics **48** (1919), S. 272–293.

— Note on Messrs. Shah and Wilson's paper entitled On an empirical formula connected with Goldbach's theorem; Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **19** (1919), S. 245–254.

— Some problems of „Partitio Numerorum", I, A new solution of Waring's problem; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1920, S. 33–54.

— Some problems of „Partitio Numerorum", II, Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates; Math. Ztschr. **9** (1921), S. 14–27.

gefunden haben, läßt sich sinngemäß erweitern, so daß auch Probleme in der *additiven Theorie* der *algebraischen Zahlkörper* zugänglich werden. Allerdings scheinen die Sätze über die Zerlegungen natürlicher Zahlen nur in *total reellen*[3]) Zahlkörpern Analoga zu besitzen. Um die Methode klarzustellen, beschränke ich mich in dieser Arbeit auf einen in rechnerischer Durchführung besonders einfachen Fall; ich beweise nämlich asymptotische Formeln für die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahlen eines reellen *quadratischen* Zahlkörpers als Summen von *Quadraten* ganzer Zahlen desselben Körpers. Anwendungen der Methode auf allgemeinere Fragen, z. B. auf das Waringsche Problem in algebraischen Zahlkörpern, möchte ich in weiteren Arbeiten publizieren.

Das Hauptresultat dieser Abhandlung ist: Es sei s eine natürliche Zahl $\geqq 5$, m eine quadratfreie natürliche Zahl $\geqq 2$, K der durch $\sqrt{m}$ erzeugte reelle quadratische Körper, d seine Grundzahl. Es bedeute ν eine total positive ganze Zahl aus K, welche im Falle $m \equiv 2 \pmod 4$ oder $m \equiv 3 \pmod 4$ die Form $a + b\sqrt{m}$ (a, b ganz rational) mit *geradem* b besitzt. Dann ist die Anzahl der Darstellungen von ν als Summe von s Quadraten ganzer Zahlen aus K

$$A_s(\nu) \sim \mathfrak{S} \frac{\pi^s N\nu^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}}, \tag{1}$$

wo sich die asymptotische Abschätzung auf $N\nu \to \infty$ bezieht und $\mathfrak{S}$ zwar von ν abhängt, aber doch für jedes ν zwischen zwei *positiven*, nur vom Körper K abhängigen Schranken gelegen ist.

Daraus folgt speziell für $s = 5$: Es gibt eine nur von K abhängige natürliche Zahl n, so daß für *jedes* ganze total positive ν die Gleichung

$$\nu = \left(\frac{\xi_1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\xi_5}{n}\right)^2$$

eine Lösung in *ganzen* Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_5$ aus K besitzt[4]).

---

[3]) Ein Zahlkörper heißt reell, wenn alle seine Zahlen reell sind; ein algebraischer Zahlkörper heißt *total reell*, wenn auch die Konjugierten aller seiner Zahlen reell sind. In nicht reellen Zahlkörpern kann z. B. die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ *unendlich viele* Lösungen in ganzen Zahlen haben, z. B. in $K(\sqrt{-3})$, weil $x^2 - 3y^2 = 1$ unendlich viele Lösungen hat.

[4]) Der Satz „Jede total positive Zahl eines quadratischen Zahlkörpers ist Summe von vier Quadratzahlen desselben Körpers" ist von E. Landau bewiesen worden in seiner Arbeit: Über die Zerlegung total positiver Zahlen in Quadrate; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1919, S. 392–396. Ich habe mit elementaren Mitteln gezeigt, daß sich jede total positive ganze Zahl eines total reellen Körpers darstellen läßt als Summe solcher Quadratzahlen des Körpers, deren Nenner einem endlichen, nur vom Körper

§ 1 bringt den Anschluß der Untersuchung an Heckes Thetareihen. In § 2 wird eine Formel abgeleitet, welche im Körper K der Funktionalgleichung der Lipschitzschen verallgemeinerten ζ-Funktion entspricht. § 3 liefert auf Grund des Minkowskischen Satzes über lineare Formen eine für die ganze Untersuchung fundamentale Zerlegung eines zweidimensionalen Bereiches, als Verallgemeinerung der bei den englischen Forschern auftretenden Fareyschen Zerlegung. In § 4 wird der Gang des Beweises skizziert, dieser selbst, soweit er die asymptotische Formel (1) betrifft, in §§ 5 bis 7 geführt. § 8 trägt rein arithmetischen Charakter; dort wird die in (1) mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete Größe, die in Gestalt einer unendlichen Reihe (als Verallgemeinerung der *„singular series“* von Hardy und Littlewood) auftritt, in geschlossener Form summiert. Für den einfachsten Fall

$$m \equiv 1 \pmod 8, \qquad s = 4\sigma \equiv 0 \pmod 4, \qquad (\nu, 2) = 1$$

ergibt sich dabei

$$A_{4\sigma}(\nu) \sim C \sum_{\mathfrak{t} \mid \nu} N\mathfrak{t}^{2\sigma-1} \qquad (\sigma = 2, 3, \ldots).$$

Hierbei durchläuft $\mathfrak{t}$ alle Idealteiler von ν, die asymptotische Abschätzung bezieht sich wieder auf $N\nu \to \infty$, und C ist die *rationale* Konstante

$$C = \frac{4}{(2^{2\sigma}-1)^2 d^{2\sigma-1} \dfrac{h^{2\sigma}}{2\sigma} \sum\limits_{n=1}^{d} \left(\dfrac{d}{n}\right) S_{2\sigma-1}\left(\dfrac{n}{d}\right)},$$

wo $h^{2\sigma}$ die 2σ-te Bernoullische Zahl, $\left(\frac{d}{n}\right)$ das Kroneckersche Restsymbol, $S_{2\sigma-1}(x)$ das $(2\sigma-1)$-te Bernoullische Polynom bedeuten.

§ 1.

Heckes Thetaformel[5]).

Es sei K ein reell-quadratischer Zahlkörper mit der Grundzahl d; $\mathfrak{a}$ sei ein ganzes Ideal, ϱ eine ganze Zahl dieses Körpers; es seien t und t' zwei Veränderliche, die den Bedingungen $\mathfrak{J}t > 0$, $\mathfrak{J}t' < 0$ genügen. Sind u, u' zwei Unbestimmte, α, α' konjugierte Zahlen aus K, so soll unter $S(u\alpha)$ (*„Spur* von $u\alpha$“) stets die Summe $u\alpha + u'\alpha'$ verstanden werden; entsprechend sei $S\frac{\alpha}{u} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\alpha'}{u'}$. Diese Abkürzung wird nur so verwendet

---

abhängigen Wertevorrat angehören; vgl. meine Abhandlung: Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate; Math. Ztschr. 11 (1921), S. 246–275.

[5]) Vgl. E. Hecke, Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1917, S. 299–318.

werden, daß kein Widerspruch gegen die übliche Bezeichnung $S\alpha = \alpha + \alpha'$ entsteht.

Hecke hat für die Funktion

$$\vartheta(t, t'; \varrho, \mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}|\mu} e^{\pi i \left\{ \frac{(\mu+\varrho)^2 t}{\sqrt{d}} - \frac{(\mu'+\varrho')^2 t'}{\sqrt{d}} \right\}} = \sum_{\mathfrak{a}|\mu} e^{\pi i S \frac{(\mu+\varrho)^2 t}{\sqrt{d}}}$$

die folgende Formel bewiesen[6]):

$$(2) \qquad \vartheta(t, t'; \varrho, \mathfrak{a}) = \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{t}\sqrt{t'}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}}|\lambda} e^{-\pi i S \frac{\lambda^2}{t\sqrt{d}} + 2\pi i S \frac{\lambda\varrho}{\sqrt{d}}};$$

darin bedeutet $\sum\limits_{\mathfrak{a}|\mu}$ (wie fortan stets in analogen Fällen), daß μ alle Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$ durchläuft, und unter $\sqrt{t}$, $\sqrt{t'}$ sind die Hauptwerte zu verstehen.

Ist γ eine Zahl aus K und $\mathfrak{n}$ das ganze Ideal von kleinster Norm, für welches das Ideal $(\gamma)\mathfrak{n}$ ganz ist, so heißt $\mathfrak{n}$ der *Nenner* von γ. Die ganzen Zahlen aus K haben also den Nenner 1. Es habe nun γ speziell den Nenner $\mathfrak{a}$. Setzt man dann in der Funktion $\vartheta(t, t'; 0, \mathfrak{o}) = \vartheta(t, t')$

$$t = w + 2\gamma, \quad t' = w' + 2\gamma' \quad (\mathfrak{I}w > 0,\ \mathfrak{I}w' < 0),$$

so gilt wegen (2)

$$(3) \quad \vartheta(w + 2\gamma, w' + 2\gamma') = \sum_{\mathfrak{o}|\mu} e^{2\pi i S \frac{\mu^2 \gamma}{\sqrt{d}} + \pi i S \frac{\mu^2 w}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2 \gamma}{\sqrt{d}}} \sum_{\mathfrak{a}|\lambda} e^{\pi i S \frac{(\lambda+\varrho)^2 w}{\sqrt{d}}}$$

$$= \frac{1}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}}|\lambda} e^{-\pi i S \frac{\lambda^2}{w\sqrt{d}}} \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\gamma + \varrho\lambda}{\sqrt{d}}};$$

darin bedeutet $\sum\limits_{\varrho \bmod \mathfrak{a}}$ (wie fortan stets in analogen Fällen), daß ϱ ein vollständiges Restsystem modulo $\mathfrak{a}$ durchläuft, und es ist berücksichtigt worden, daß für $\mathfrak{a}|\lambda$ die Zahl $\lambda^2\gamma + 2\lambda\varrho\gamma$ ganz, also $S\frac{\lambda^2\gamma + 2\lambda\varrho\gamma}{\sqrt{d}}$ ganz rational ist.

---

[6]) Die Bezeichnung ist der bequemeren Schreibweise halber etwas anders als in loc. cit.[5]) und bei E. Hecke, Reziprozitätsgesetz und Gaußsche Summen in quadratischen Zahlkörpern; Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1919, S. 265–278. Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit »Hecke, R.« zitiert.

§ 2.

Aufstellung der Vergleichsfunktion.

Es seien s, w, w' drei Parameter, die den Bedingungen

$$s > 1, \quad \Im w > 0, \quad \Im w' < 0$$

genügen. Es sei ω_1, ω_2 eine Basis von K. Bedeuten dann x und y zwei reelle Variable, so setze ich

$$\xi = x\,\omega_1 + y\,\omega_2, \qquad \xi' = x\,\omega_1' + y\,\omega_2',$$

$$F(x, y) = \sum_{\mu+\xi \succ 0} N(\mu+\xi)^{s-1}\, e^{2\pi i S \frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}}}; \tag{4}$$

in $\sum\limits_{\mu+\xi \succ 0}$ durchläuft μ alle ganzen Zahlen aus K, für welche $\mu + \xi$ *total positiv*, d. h. $\mu + \xi > 0$, $\mu' + \xi' > 0$ ist, und $N(\mu + \xi)$ ist die *Norm* $(\mu + \xi)(\mu' + \xi')$. Daß die rechte Seite von (4) konvergiert, wird sogleich bewiesen werden. Sie hat in x und y je die Periode 1. Zugleich mit der Konvergenz will ich die Entwickelbarkeit von $F(x, y)$ in eine absolut konvergente Fouriersche Reihe

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{mn}\, e^{2\pi i (mx+ny)} \tag{5}$$

beweisen.

Wegen

$$\left| e^{2\pi i S \frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}}} \right| = e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{d}} \{\Im w (\mu+\xi) + |\Im w'| (\mu'+\xi')\}}$$

gibt es zwei nur von s, w, w', K abhängige positive Zahlen L_1 und L_2 (dieselbe Bedeutung haben in diesem Paragraphen $L_3, \ldots, L_7$), so daß das allgemeine Glied in (4) absolut

$$< L_1\, e^{-L_2 S(\mu+\xi)} \tag{6}$$

ist[7]). Differentiiert man für $s > 4$ das allgemeine Glied von (4) ein-, zwei- oder dreimal nach seinen Variablen x und y, so erhält man eine Summe von 2, 4 oder 8 Gliedern, deren jedes eine Abschätzung der Form (6) gestattet. Ich darf also annehmen, daß, falls $s > 4$ ist, die Abschätzung (6) auch für die absoluten Beträge der ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen des allgemeinen Gliedes in (4) gilt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega_1 \succ 0$, $\omega_2 \succ 0$ [8]), ferner

---

[7]) Das allgemeine Glied ist $\neq 0$ nur für $\mu + \xi \succ 0$.

[8]) Es genügt, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \dfrac{d - \sqrt{d}}{2}$ zu setzen.

$\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'=+\sqrt{d}>0$. Setzt man $\mu=a\omega_1+b\omega_2$, so folgen aus $\mu+\xi\succ 0$ die Relationen

$$(7)\qquad (a+x)\omega_1+(b+y)\omega_2>0,\qquad a+x>-\frac{\omega_2}{\omega_1}(b+y),$$

$$(8)\qquad \begin{aligned}\omega_1\{(a+x)\omega_1'+(b+y)\omega_2'\}&=(b+y)(\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1')\\&+\omega_1'\{(a+x)\omega_1+(b+y)\omega_2\}>(b+y)\sqrt{d}\end{aligned}$$

und

$$(9)\qquad (a+x)\omega_1'+(b+y)\omega_2'>0,\qquad b+y>-\frac{\omega_1'}{\omega_2'}(a+x),$$

$$(10)\qquad \begin{aligned}\omega_2'\{(a+x)\omega_1+(b+y)\omega_2\}&=(a+x)(\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1')\\&+\omega_2\{(a+x)\omega_1'+(b+y)\omega_2'\}>(a+x)\sqrt{d}.\end{aligned}$$

Von den beiden Zahlen $a+x$ und $b+y$ ist mindestens eine positiv. Bei festem $b+y>0$ kommen nach (7) für $a+x$ höchstens $\left[\frac{\omega_2}{\omega_1}(b+y)\right]+1$ Werte <0 in Betracht; nach (8) ist dann $S(\mu+\xi)>\frac{\sqrt{d}}{\omega_1}(b+y)$. Bei festem $a+x>0$ kommen nach (9) für $b+y$ höchstens $\left[\frac{\omega_1'}{\omega_2'}(a+x)\right]+1$ Werte <0 in Betracht; nach (10) ist dann $S(\mu+\xi)>\frac{\sqrt{d}}{\omega_2'}(a+x)$. Folglich ist der Beitrag, den zur Summe (4) bei festem $b+y>0$ die negativen $a+x$ liefern, absolut

$$<L_3(b+y+1)\,e^{-L_4(b+y)};$$

ebenso liefern bei festem $a+x>0$ die negativen $b+y$ zu (4) einen Beitrag vom absoluten Werte

$$<L_5(a+x+1)\,e^{-L_6(a+x)}.$$

Daher hat die Reihe (4) eine Majorante der Form

$$\sum_{a+x>0}L_5(a+x+1)\,e^{-L_6(a+x)}+\sum_{b+y>0}L_3(b+y+1)\,e^{-L_4(b+y)}$$
$$+\sum_{a+x\geqq 0}\;\sum_{b+y\geqq 0}L_1\,e^{-L_2\{(a+x)S\omega_1+(b+y)S\omega_2\}}.$$

Diese Reihe aber ist gleichmäßig konvergent für alle x, y, also auch die rechte Seite in (4). Nach der oben gemachten Bemerkung gilt dies im Falle $s>4$ auch für die Reihen, welche aus $F(x,y)$ durch gliedweise ein-, zwei- oder dreimalige partielle Differentiation hervorgehen. Das allgemeine Glied von $F(x,y)$[8]) und (im Falle $s>4$) seine ersten, zweiten und dritten Ableitungen sind aber stetige Funktionen von x und y; folg-

[8]) Vgl. [7]).

lich ist $F(x, y)$ stetig und hat (im Falle $s > 4$) stetige partielle Ableitungen erster bis dritter Ordnung.

Ist $s > 4$, so läßt sich demnach $F(x, y)$ in eine absolut konvergente Fouriersche Reihe (5) entwickeln. Setzt man $\varepsilon_a = 0$ für $a < 0$, $= 1$ für $a \geqq 0$, so ergeben sich deren Koeffizienten aus

$$A_{mn} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_\mu \varepsilon_{\mu+\xi}\, \varepsilon_{\mu'+\xi'}\, N(\mu+\xi)^{s-1}\, e^{2\pi i S \frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}} - 2\pi i (mx+ny)}\, dx\, dy,$$

wo über *alle* ganzen μ summiert wird. Wegen der vorhin bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe darf man gliedweise integrieren. Führt man als neue Veränderliche

$$\xi = x\,\omega_1 + y\,\omega_2, \qquad \xi' = x\,\omega_1' + y\,\omega_2'$$

ein, so wird

$$x\sqrt{d} = \xi\omega_2' - \xi'\omega_2, \qquad y\sqrt{d} = -\xi\omega_1' + \xi'\omega_1,$$

$$\frac{d(x,y)}{d(\xi,\xi')} = \frac{1}{\sqrt{d}},$$

$$(11) \qquad e^{-2\pi i(mx+ny)} = e^{-2\pi i S \frac{\xi(m\omega_2'-n\omega_1')}{\sqrt{d}}} = e^{-2\pi i S \frac{(\mu+\xi)(m\omega_2'-n\omega_1')}{\sqrt{d}}};$$

$$A_{mn} = \sum_\mu \iint \varepsilon_{\mu+\xi}\, \varepsilon_{\mu'+\xi'}\, N(\mu+\xi)^{s-1}\, e^{2\pi i S \frac{(\mu+\xi)\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}}{\sqrt{d}}} \frac{1}{\sqrt{d}}\, d\xi\, d\xi',$$

wo über das Bild des Einheitsquadrates der xy-Ebene in der $\xi\xi'$-Ebene integriert wird. Es folgt

$$A_{mn} = \frac{1}{\sqrt{d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_u\, \varepsilon_{u'}\, (u\,u')^{s-1}\, e^{2\pi i S\left\{u \frac{w-(m\omega_2'-n\omega_1')}{\sqrt{d}}\right\}}\, du\, du'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}} \int_0^\infty u^{s-1}\, e^{\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}u}\, du \int_0^\infty u'^{s-1}\, e^{-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}u'}\, du',$$

wo beide Integrale wegen $\mathfrak{J}w > 0$, $\mathfrak{J}w' < 0$ absolut konvergieren. Also ist schließlich

$$A_{mn} = \frac{1}{\sqrt{d}}\,\Gamma(s)\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}\right)^{-s} \Gamma(s)\left(\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}\right)^{-s}$$

$$= \frac{\Gamma^2(s)}{\sqrt{d}}\left(\frac{\sqrt{d}}{2\pi}\right)^{2s} \frac{1}{N\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}^s}.\ [10]$$

[10]) Die s-ten Potenzen haben die Bedeutung

$$\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}\right)^s = e^{s\log\left(-\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}\right)},$$

(Fortsetzung der Fußnote 10 auf der nächsten Seite.)

Dies trage ich in (5) ein; dann folgt wegen (11)

$$F(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma^2(s)\,d^{s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2s}}\,\frac{e^{2\pi i S\frac{\xi(m\omega_2'-n\omega_1')}{\sqrt{d}}}}{N\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}^s},$$

oder, da ω_2', $-\omega_1'$ eine Basis von K ist,

$$(12)\qquad \sum_{\mu+\xi\succ 0} N(\mu+\xi)^{s-1}\,e^{2\pi i S\frac{w(\mu+\xi)}{\sqrt{d}}}=\frac{\Gamma^2(s)\,d^{s-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{2s}}\sum_{\lambda}\frac{e^{2\pi i S\frac{\xi\lambda}{\sqrt{d}}}}{N(w-\lambda)^s},$$

wo λ alle ganzen Zahlen aus K durchläuft.

Die Formel (12) ist unter der Annahme $s>4$ bewiesen worden. Daß sie für jedes $s>1$ gilt, erkennt man folgendermaßen: Es sei G ein ganz im Endlichen gelegenes abgeschlossenes Gebiet der Halbebene $\Re s>1$. Dann gilt offenbar die Abschätzung (6) des allgemeinen Gliedes von (4) bei geeigneter Wahl der Konstanten L_1 und L_2 gleichmäßig für alle s aus G. Die linke Seite von (12) konvergiert also gleichmäßig für alle s des Gebietes G, stellt also eine dort reguläre analytische Funktion von s dar. Die Gleichung (12) gilt demnach sicher dann für $s>1$, wenn die rechte Seite gleichmäßig in G konvergiert. Wegen $0<\operatorname{arc}(w-\lambda)<\pi$, $-\pi<\operatorname{arc}(w'-\lambda')<0$ genügt es, gleichmäßige Konvergenz von

$$(13)\qquad \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{(m\omega_1+n\omega_2-\Re w)^2+(\Im w)^2\}^{\frac{-\Re s}{2}}\{(m\omega_1'+n\omega_2'-\Re w')^2+(\Im w')^2\}^{\frac{-\Re s}{2}}$$

zu beweisen. Nun ist, wie geometrisch sofort einleuchtet, für jedes Paar ganzer Zahlen k, l die Anzahl der Lösungen der Ungleichungen

$$k\leqq|m\omega_1+n\omega_2-\Re w|<k+1,$$
$$l\leqq|m\omega_1'+n\omega_2'-\Re w'|<l+1$$

in ganzen rationalen m, n kleiner als L_7, so daß (13) die gleichmäßig konvergente Majorante

$$L_7\Big\{|\Im w\,\Im w'|^{-\Re s}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\Re s}|\Im w'|^{-\Re s}+\sum_{l=1}^{\infty}l^{-\Re s}|\Im w|^{-\Re s}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(kl)^{-\Re s}\Big\}$$

besitzt.

$$\left(\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}\right)^s=e^{s\log\left(\frac{2\pi i}{\sqrt{d}}\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}\right)},$$

$$N\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}^s=e^{s\log\{w-(m\omega_2'-n\omega_1')\}+s\log\{w'-(m\omega_2-n\omega_1)\}}$$

mit dem Hauptwert des Logarithmus.

(12) bildet die Verallgemeinerung einer wichtigen Formel von Lipschitz[11]) auf reell-quadratische Zahlkörper. Für den speziellen Fall $s = 2, 3, \ldots$, $x = 0$, $y = 0$ ergibt sie sich auch aus einer noch nicht publizierten Formel, die mir Herr F. Bernstein im Sommer 1920 mitteilte. Diese Bernsteinsche Formel hat mich zuerst zu den Untersuchungen dieses Paragraphen veranlaßt[12]).

Setzt man in (12) $x = 0$, $y = 0$ und schreibt noch $\frac{s}{2}, \frac{w}{2}, \frac{w'}{2}$ an Stelle von s, w, w', so wird für $s > 2$, $\mathfrak{J} w > 0$, $\mathfrak{J} w' < 0$

$$(14) \qquad \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1} e^{\pi i S \frac{\mu w}{\sqrt{d}}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}}{\pi^s} \sum_{\lambda} \frac{1}{N(w-2\lambda)^{\frac{s}{2}}}.$$

§ 3.

Zerlegung des Fundamental-Parallelogramms.

In diesem Paragraphen schicke ich zwei Hilfssätze voran.

Hilfssatz 1. Es sei ω_1, ω_2 eine Basis des reellen quadratischen Zahlkörpers von der Grundzahl d. Es seien u und u' zwei reelle Zahlen. Zu jeder Zahl $L > \sqrt{d}$ gibt es vier ganze rationale Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2, so daß die folgenden Ungleichungen gelten:

$$|(y_1\omega_1 + y_2\omega_2)\,u - (x_1\omega_1 + x_2\omega_2)| \leq \frac{\sqrt{d}}{L},$$

$$|(y_1\omega_1' + y_2\omega_2')\,u' - (x_1\omega_1' + x_2\omega_2')| \leq \frac{\sqrt{d}}{L},$$

$$|y_1\omega_1 + y_2\omega_2| \leq L, \quad |y_1\omega_1' + y_2\omega_2'| \leq L, \quad y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \neq 0.$$

Beweis. Die Determinante der vier linearen Formen in y_1, y_2, x_1, x_2, die in den Zeichen des absoluten Betrages auf den linken Seiten der ersten vier Ungleichungen der Behauptung stehen, ist

$$\begin{vmatrix} \omega_1 u & \omega_2 u & -\omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_1' u' & \omega_2' u' & -\omega_1' & -\omega_2' \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \omega_1' & \omega_2' & 0 & 0 \end{vmatrix} = (\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1')^2 = d;$$

das Produkt der rechten Seiten ist gleichfalls d. Nach Minkowskis Satz[13])

---

[11]) Vgl. R. Lipschitz, Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen; Journal für die reine und angewandte Mathematik **105** (1889), S. 127–156.

[12]) Wie mir Herr Hecke mitteilt, hat er bei den Untersuchungen über seine Zetafunktionen die Formel (12) ebenfalls gefunden.

[13]) Vgl. H. Minkowski, Geometrie der Zahlen; Leipzig und Berlin (B. G. Teubner) 1910; § 37.

über lineare Formen gibt es vier ganze rationale Zahlen y_1, y_2, x_1, x_2, welche den ersten vier Ungleichungen genügen und nicht sämtlich 0 sind. Wäre nun $y_1\omega_1 + y_2\omega_2 = 0$, d. h. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, so wäre

$$|(x_1\omega_1 + x_2\omega_2)(x_1\omega_1' + x_2\omega_2')| \leqq \frac{d}{L^2} < 1,$$

also auch $x_1\omega_1 + x_2\omega_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, was nicht zutrifft. Also gilt auch die 5. Ungleichung der Behauptung.

Hilfssatz 2. Es seien γ_1 und γ_2 zwei verschiedene Zahlen aus K mit den Nennern $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Man deute (γ_1, γ_1') und (γ_2, γ_2') als Koordinaten zweier Punkte in einem rechtwinkeligen Achsenkreuz. Dann ist der Abstand dieser Punkte größer als $\frac{1}{\sqrt{N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2}}$.

Beweis. Es sei $\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$, $\gamma_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$, $\alpha_1 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\alpha_2 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2$, und $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ganz. Dann ist das Quadrat des Abstandes

$$r^2 = (\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (\gamma_1' - \gamma_2')^2 = \frac{(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2} + \frac{(\beta_1'\alpha_2' - \beta_2'\alpha_1')^2}{\alpha_1'^2\alpha_2'^2}. \tag{15}$$

Nun ist

$$\mathfrak{c}_1 | \beta_1, \quad \mathfrak{c}_2 | \beta_2, \quad \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 | \beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 \neq 0, \quad \mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}_2' | \beta_1'\alpha_2' - \beta_2'\alpha_1',$$

also

$$\frac{(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1)^2}{\alpha_1^2\alpha_2^2}\,\frac{(\beta_1'\alpha_2' - \beta_2'\alpha_1')^2}{\alpha_1'^2\alpha_2'^2} = N\left(\frac{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1}{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2}\right)^2 \frac{1}{N\mathfrak{a}_1^2 N\mathfrak{a}_2^2} \geqq \frac{1}{N\mathfrak{a}_1^2 N\mathfrak{a}_2^2}. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$r^2 \geqq \frac{2}{N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2} > \frac{1}{N\mathfrak{a}_1 N\mathfrak{a}_2},$$

also die Behauptung.

Unter dem *Fundamental-Parallelogramm* E verstehe ich dasjenige Parallelogramm in der uu'-Ebene, welches durch die Substitution $u = x\omega_1 + y\omega_2$, $u' = x\omega_1' + y\omega_2'$ aus dem Quadrat

$$-\tfrac{1}{2} \leqq x < +\tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq y < +\tfrac{1}{2}$$

der xy-Ebene entsteht. Von den Ecken des Parallelogramms wird nur das Bild des Punktes $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ der xy-Ebene mitgerechnet, von den Rändern nur die an jenen Punkt anstoßenden. Ich nenne zwei Punkte der uu'-Ebene kongruent (mod 1), wenn sich ihre Koordinaten um konjugierte ganze Zahlen aus K unterscheiden. Jedem Punkt der uu'-Ebene ist dann (mod 1) ein und nur ein Punkt von E kongruent.

Ich zerlege nun die uu'-Ebene folgendermaßen in Bereiche: Eine feste Zahl $M > d$ sei gegeben. Mit $\mathfrak{M}$ bezeichne ich die Menge aller Punkte (γ, γ'), deren Koordinaten γ, γ' konjugierte Zahlen aus K mit Nennern $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ von einer Norm $N\mathfrak{a} \leqq M$ sind.

I. Ist (γ, γ') irgendein Punkt der Menge $\mathfrak{M}$, so lege ich um ihn als Zentrum einen Kreis $\mathfrak{K}_\gamma$ vom Radius $\frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}$. Zu verschiedenen Nennern $\mathfrak{a}$ gehören also verschiedene Radien. Nach Hilfssatz 2 schneiden sich diese Kreise nicht; sie lassen also einen Teil der uu'-Ebene frei.

II. Ich betrachte die Menge $\overline{\mathfrak{M}}$ derjenigen Punkte, deren Koordinaten γ, γ' in der Form

$$(17) \qquad \gamma = \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{y_1\omega_1 + y_2\omega_2}, \qquad \gamma' = \frac{x_1\omega_1' + x_2\omega_2'}{y_1\omega_1' + y_2\omega_2'}$$

$$(x_1, x_2, y_1, y_2 \text{ ganz rational}, \; y_1\omega_1 + y_2\omega_2 \neq 0),$$

$$(18) \qquad |y_1\omega_1 + y_2\omega_2| \leqq \sqrt{M}, \qquad |y_1\omega_1' + y_2\omega_2'| \leqq \sqrt{M}$$

dargestellt werden können; dies ist eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Da die beiden Ungleichungen (18) nur endlich viele Lösungen in ganzen rationalen y_1, y_2 besitzen, so gibt es für jeden Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ nur endlich viele solcher Darstellungen. Jeden Punkt (γ, γ') von $\overline{\mathfrak{M}}$ umgebe ich nun für jede der endlich vielen Arten der Darstellung in der Form (17), (18) mit dem Rechteck

$$|u - \gamma| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1 + y_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad |u' - \gamma'| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1' + y_2\omega_2'|\sqrt{M}}.$$

Zu jedem (γ, γ') von $\overline{\mathfrak{M}}$ gehören also endlich viele Rechtecke $\mathfrak{R}_\gamma$. Jeder zu (γ, γ') kongruente Punkt $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$ gehört ebenfalls zu $\overline{\mathfrak{M}}$, und da $\bar{\gamma} - \gamma$ eine ganze Zahl aus K ist, so sind die Rechtecke $\mathfrak{R}_{\bar{\gamma}}$ den Rechtecken $\mathfrak{R}_\gamma$ paarweise (mod 1) kongruent.

Zu jedem Punkte (u, u') sind nun nach Hilfssatz 1 vier ganze rationale Zahlen x_1, x_2, y_1, y_2 derart angebbar, daß

$$\left|u - \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{y_1\omega_1 + y_2\omega_2}\right| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1 + y_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad \left|u' - \frac{x_1\omega_1' + x_2\omega_2'}{y_1\omega_1' + y_2\omega_2'}\right| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|y_1\omega_1' + y_2\omega_2'|\sqrt{M}},$$

$$0 < |y_1\omega_1 + y_2\omega_2| \leqq \sqrt{M}, \qquad 0 < |y_1\omega_1' + y_2\omega_2'| \leqq \sqrt{M}$$

ist. Setzt man dann $\gamma = \frac{x_1\omega_1 + x_2\omega_2}{y_1\omega_1 + y_2\omega_2}$, so gehört (γ, γ') zu $\overline{\mathfrak{M}}$, und (u, u') liegt in einem Rechtecke $\mathfrak{R}_\gamma$. Die Rechtecke überdecken daher *alle* Punkte der Ebene; eventuell zum Teil mehrfach.

Die ganze Figur von Kreisen und Rechtecken geht in sich über, wenn E in ein (mod 1) kongruentes Parallelogramm verschoben wird. Von den Rechtecken (oder Rechtecksteilen) $\mathfrak{R}_\gamma$, die in E liegen, lasse ich zunächst diejenigen Stücke fort, welche in die Kreise $\mathfrak{K}_\gamma$ fallen. Schneiden sich zwei der übrigbleibenden Teile der $\mathfrak{R}_\gamma$ in E, so lasse ich ferner bei einem von beiden das gemeinsame Stück fort. Da nur endlich viele $\mathfrak{R}_\gamma$ in E hineinfallen, so erhält man nach endlich vielen Schritten eine *einfache* Überdeckung des Fundamental-Parallelogramms.

Es sei $\mathfrak{F}$ eines der endlich vielen Stücke, in welche E bei dieser Überdeckung zerfällt. Dann ist also $\mathfrak{F}$ Teil eines Kreises oder Rechtecks, das um einen ganz bestimmten Punkt (γ, γ') der Menge $\mathfrak{M}$ oder $\overline{\mathfrak{M}}$ gelegt ist. Diesem Punkte (γ, γ') ist (mod 1) ein Punkt $(\bar\gamma, \bar\gamma')$ von E kongruent; eventuell koinzidieren beide Punkte. Ich verschiebe nun das Gebiet $\mathfrak{F}$, indem ich die Koordinaten aller seiner Punkte um $\bar\gamma - \gamma$ und $\bar\gamma' - \gamma'$ vermehre; das durch diese Verschiebung entstandene, zu $\mathfrak{F}$ (mod 1) kongruente Gebiet ordne ich dem Punkte $(\bar\gamma, \bar\gamma')$ von E zu. Dies führe ich für alle die endlich vielen Teile $\mathfrak{F}$ von E aus. Das *Ergebnis* ist folgendes:

$M > d$ sei gegeben. Die (endliche) Menge derjenigen Punkte von E, deren Koordinaten γ, γ' konjugierte Zahlen aus K mit Nennern $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ von einer Norm $N\mathfrak{a} \leq M$ sind, werde mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet. Jedem Punkte (γ, γ') von $\mathfrak{E}$ ist ein Gebiet $\mathfrak{F}_\gamma$ zugeordnet („umbeschrieben"), welches sich aus endlich vielen Polygonen zusammensetzt, deren Seiten Strecken oder Kreisbögen sind. Zeichnet man zu allen $\mathfrak{F}_\gamma$ die ihnen (mod 1) kongruenten Teile von E, so überdecken diese Teile das Gebiet E lückenlos und einfach. $\mathfrak{F}_\gamma$ enthält den Kreis $\mathfrak{K}_\gamma$; der übrige Teil von $\mathfrak{F}_\gamma$ (wenn es einen solchen gibt) werde mit $\mathfrak{K}_\gamma^*$ bezeichnet. Irgendein Punkt (u, u') der Ebene liegt

1. entweder außerhalb von $\mathfrak{F}_\gamma$; dann hat er nach I. von (γ, γ') mindestens den Abstand $\dfrac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}$;

2. oder in $\mathfrak{K}_\gamma$; dann ist nach I.

$$|u - \gamma| \leq \frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}, \qquad |u' - \gamma'| \leq \frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}; \tag{19}$$

3. oder in $\mathfrak{K}_\gamma^*$; dann ist nach II. für vier gewisse ganze rationale Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2

$$\gamma = \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}{b_1\omega_1 + b_2\omega_2}, \qquad \gamma' = \frac{a_1\omega_1' + a_2\omega_2'}{b_1\omega_1' + b_2\omega_2'},$$

$$\left\{\begin{aligned} &|b_1\omega_1 + b_2\omega_2| \leq \sqrt{M}, \qquad |b_1\omega_1' + b_2\omega_2'| \leq \sqrt{M}, \\ &\qquad 1 \leq |N(b_1\omega_1 + b_2\omega_2)| \leq M, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$|u - \gamma| \leq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1 + b_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad |u' - \gamma'| \leq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1' + b_2\omega_2'|\sqrt{M}}. \tag{21}$$

Diese Zerlegung in Bereiche $\mathfrak{F}_\gamma$ nenne ich kurz die *F-Zerlegung*.

§ 4.

Gang des Beweises.

Es seien t und t' zwei Unbestimmte, die den Bedingungen $\mathfrak{J}t > 0$, $\mathfrak{J}t' < 0$ genügen. Dann ist für jedes natürliche s

$$\vartheta^s(t, t') = \Big(\sum_{0|\mu} e^{\pi i S \frac{\mu^2 t}{\sqrt{d}}}\Big)^s - \sum_{0|\lambda} A_s(\lambda)\, e^{\pi i S \frac{\lambda t}{\sqrt{d}}}, \tag{22}$$

wo $A_s(\lambda)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl λ als Summe von s Quadraten ganzer Zahlen aus K bedeutet. Ist μ irgendeine ganze Zahl aus K, so sind $S\frac{\mu\omega_1}{\sqrt{d}}$ und $S\frac{\mu\omega_2}{\sqrt{d}}$ stets ganz rational, und zwar beide $=0$ nur für $\mu=0$. Nach (22) ist also

$$(\nu)=e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}\vartheta^s(t+2(x\omega_1+y\omega_2),\,t'+2(x\omega_1'+y\omega_2'))\,e^{-2\pi i S\frac{\nu(x\omega_1+y\omega_2)}{\sqrt{d}}}\,dx\,d$$

$$=\frac{1}{\sqrt{d}}\,e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\iint\limits_{E}\vartheta^s(t+2u,\,t'+2u')\,e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}\,du\,du';$$

und folglich bei Benutzung der F-Zerlegung

$$(23)\quad A_s(\nu)=\frac{1}{\sqrt{d}}\,e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\sum_{\gamma}{}'\iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma}\vartheta^s(t+2u,\,t'+2u')\,e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}\,du\,du',$$

wo γ alle Zahlen von $\mathfrak{E}$ durchläuft[14]).

Es sei $\mathfrak{a}$ der Nenner von γ. Setzt man

$$G(\gamma)=\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2\gamma}{\sqrt{d}}},$$

so ist nach (3) für $0<\mathfrak{J}w\to 0$, $0>\mathfrak{J}w'\to 0$

$$\vartheta^s(w+2\gamma,\,w'+2\gamma')\sim\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}}\right)^s.\ ^{15)}$$

In § 5 wird dies angewendet für $w=t+2(u-\gamma)$, $w'=t'+2(u'-\gamma')$, wo (u,u') einen Punkt in $\mathfrak{F}_\gamma$ bedeutet; dort wird nämlich die Funktion $\vartheta^s(t+2u,\,t'+2u')$ aus dem Integranden bei (23) ersetzt durch $\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}\sqrt{t+2(u-\gamma)}\sqrt{t'+2(u'-\gamma')}}\right)^s$. In § 6 wird diese Funktion unter Benutzung von (14) ersetzt durch die Reihe

$$\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s\frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_{\mu\succ 0}N\mu^{\frac{s}{2}-1}\,e^{\pi i S\frac{\mu\{t+2(u-\gamma)\}}{\sqrt{d}}}.$$

In § 7 wird schließlich jedes $\mathfrak{F}_\gamma$ wieder durch das ganze Fundamental-Parallelogramm ersetzt und in (23) die Summe über ein vollständiges System (mod 1) inkongruenter Zahlen γ[16]), nicht nur über die Zahlen γ

---

[14]) Der Integrand hat in x, y die Perioden 1, 1; also darf das Integrationsgebiet E durch die Gebiete $\mathfrak{F}_\gamma$ ersetzt werden.

[15]) $\sqrt{w}$ und $\sqrt{w'}$ haben ihre Hauptwerte.

[16]) Zwei Zahlen aus K heißen inkongruent (mod 1), wenn ihre Differenz nicht ganz ist.

der Menge $\mathfrak{E}$, erstreckt. Dann tritt an Stelle von $A_s(\nu)$ bei formaler Rechnung der Ausdruck

$$B_s(\nu)=\frac{1}{\sqrt{d}}e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\sum_{\gamma}\iint_{\mathfrak{E}}\frac{\pi^s}{\Gamma^s\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s\sum_{\mu\succ 0}N\mu^{\frac{s}{2}-1}e^{\pi i S\frac{\mu\{t+2(u-\gamma)\}}{\sqrt{d}}}e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}d\ldots$$

$$=\frac{\pi^s N\nu^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma^s\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_{\gamma}\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\gamma\nu}{\sqrt{d}}}.$$

Die auf der rechten Seite auftretende Summe ist gerade die in Formel (1) mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete Größe. (1) behauptet also

$$A_s(\nu)\sim B_s(\nu),$$

für jedes $s\geqq 5$, $\nu\succ 0$, $N\nu\to\infty$, wobei im Falle eines geraden (also durch 4 teilbaren) d die Zahl ν von der Form $a+b\sqrt{d}$ mit ganzen rationalen a, b ist.

§ 5.

Abschätzung von $\vartheta(t+2u,\ t'+2u')$ in $\mathfrak{F}_\gamma$.

Zunächst untersuche ich die in (3) auftretende Summe

$$G(\gamma,\lambda)=\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}}e^{2\pi i S\frac{\varrho^2\gamma+\varrho\lambda}{\sqrt{d}}};$$

hierin ist γ vom Nenner $\mathfrak{a}$, λ irgendeine Zahl des Ideals $\frac{1}{\mathfrak{a}}$, und ϱ durchläuft ein vollständiges Restsystem (mod $\mathfrak{a}$). Es wird

$$(24)\qquad |G(\gamma;\lambda)|^2=\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}}\sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}}e^{2\pi i S\frac{(\varrho-\sigma)\{(\varrho+\sigma)\gamma+\lambda\}}{\sqrt{d}}}=\sum_{\tau \bmod \mathfrak{a}}\sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}}e^{2\pi i S\frac{\tau\{(\tau+2\sigma)\gamma+\lambda\}}{\sqrt{d}}}$$

$$=\sum_{\tau \bmod \mathfrak{a}}e^{2\pi i S\frac{\tau^2\gamma+\tau\lambda}{\sqrt{d}}}\sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}}e^{2\pi i S\frac{2\sigma\tau\gamma}{\sqrt{d}}}.$$

In der inneren Summe hat $2\tau\gamma=\beta$ als Nenner das Ideal $\mathfrak{a}$ oder einen Teiler von $\mathfrak{a}$. Ich unterscheide drei Fälle:

1. $\mathfrak{a}$ enthalte verschiedene Primidealteiler. Dann gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, $(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2)=1$. Es existieren zwei Hauptideale $(\alpha_1)=\mathfrak{a}_1\mathfrak{f}_1$, $(\alpha_2)=\mathfrak{a}_2\mathfrak{f}_2$, so daß $(\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2,\mathfrak{a})=1$ ist. Durchlaufen σ_1,σ_2 vollständige Restsysteme mod $\mathfrak{a}_1$, mod $\mathfrak{a}_2$, so durchläuft $\sigma=\sigma_1\alpha_2+\sigma_2\alpha_1$ alle verschiedene Reste mod $\mathfrak{a}$. Es wird

$$(25)\qquad \sum_{\sigma}e^{2\pi i S\frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}}=\sum_{\sigma_1}\sum_{\sigma_2}e^{2\pi i S\frac{(\sigma_1\alpha_2+\sigma_2\alpha_1)\beta}{\sqrt{d}}}=\sum_{\sigma_1}e^{2\pi i S\frac{\sigma_1\beta\alpha_2}{\sqrt{d}}}\sum_{\sigma_2}e^{2\pi i S\frac{\sigma_2\beta\alpha_1}{\sqrt{d}}};$$

und die Nenner von $\beta\alpha_2$ und $\beta\alpha_1$ sind $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ oder Teiler dieser Ideale.

2. $\mathfrak{a}$ sei Potenz eines Primideals: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^k$, $k \geqq 2$. Es gibt ein Hauptideal $(\alpha) = \mathfrak{p}\mathfrak{q}$ mit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = 1$. Durchlaufen die Zahlen σ_1, σ_2 vollständige Restsysteme $\bmod \mathfrak{p}$, $\bmod \mathfrak{p}^{k-1}$, so durchläuft $\sigma = \sigma_1 \alpha^{k-1} + \sigma_2$ ein vollständiges Restsystem $\bmod \mathfrak{a}$; und es wird

$$(26) \quad \sum_{\sigma} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} e^{2\pi i S \frac{(\sigma_1 \alpha^{k-1} + \sigma_2)\beta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\sigma_2} e^{2\pi i S \frac{\sigma_2 \beta}{\sqrt{d}}} \sum_{\sigma_1} e^{2\pi i S \frac{\sigma_1 \alpha^{k-1}\beta}{\sqrt{d}}},$$

wo $\alpha^{k-1}\beta$ den Nenner $\mathfrak{p}$ oder 1 hat.

3. $\mathfrak{a}$ sei ein Primideal $\mathfrak{p}$. Dann ist $\sum_{\sigma} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = 0$, wenn β den Nenner $\mathfrak{p}$ hat, $= N\mathfrak{p}$, wenn β ganz ist[17]).

Aus diesem letzten Fall 3 ergibt sich mit Rücksicht auf (25) und (26) für beliebiges $\mathfrak{a}$

$$(27) \quad \sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\sigma\beta}{\sqrt{d}}} = 0 \text{ für nicht ganzes } \beta, \quad = N\mathfrak{a} \text{ für ganzes } \beta.$$

Offenbar gilt dies auch für $\mathfrak{a} = 1$.

In (24) hat nun γ den Nenner $\mathfrak{a}$; die Zahl $\beta = 2\tau\gamma$ ist also ganz nur für $\mathfrak{a} \mid 2\tau$. Da τ alle Reste $\bmod \mathfrak{a}$ durchläuft, so ist $\mathfrak{a} \mid 2\tau$ höchstens für $N2 = 4$ Werte von τ. Die innere Summe bei (24) ist also für höchstens vier Werte von τ von 0 verschieden und dann $= N\mathfrak{a}$; also ist

$$(28) \quad |G(\gamma, \lambda)|^2 \leqq 4 N\mathfrak{a}, \qquad |G(\gamma, \lambda)| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}}.$$

In (3) trenne ich von der rechten Seite das Glied $\lambda = 0$ ab und schreibe

$$(29) \quad S_1 = \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}} \mid \lambda \neq 0} e^{-\pi i S \frac{\lambda^2}{w\sqrt{d}}} \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\gamma + \varrho\lambda}{\sqrt{d}}};$$

dann ist nach (28)

$$(30) \quad |S_1| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}} \mid \lambda \neq 0} e^{-\Re\left(\pi i S \frac{\lambda^2}{w\sqrt{d}}\right)} = 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\frac{1}{\mathfrak{a}} \mid \lambda \neq 0.} e^{-S(\lambda^2 v)},$$

wo

$$(31) \quad -\frac{\pi}{\sqrt{d}} \Im \frac{1}{w} = v, \qquad \frac{\pi}{\sqrt{d}} \Im \frac{1}{w'} = v'$$

gesetzt ist. v und v' sind positiv wegen $\Im w > 0$, $\Im w' < 0$.

---

[17]) Vgl. Hecke, R.

Es sei $\varepsilon > 1$ die Fundamentaleinheit von K. Sind p und q irgend zwei positive Zahlen, so gibt es eine ganze rationale Zahl m derart, daß

$$L_{10} < \frac{p}{\sqrt{pq}}\varepsilon^{2m}, \qquad L_{10} < \frac{q}{\sqrt{pq}}\varepsilon'^{2m} \tag{32}$$

ist, wo L_{10} (wie auch weiterhin $L_{11}, \ldots, L_{41}$) eine positive nur von K (und weiterhin evtl. von s) abhängige Zahl bedeutet.

Bekanntlich liegt in jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eine Zahl $\alpha \neq 0$ mit

$$|N\alpha| < L_{11} N\mathfrak{a}. \tag{33}$$

Aus (30) folgt für dieses α

$$|S_1| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{o}\,|\,\lambda \neq 0} e^{-s\frac{\lambda^2 \nu}{\alpha^2}},$$

wo λ alle ganzen Zahlen $\neq 0$ durchläuft; also, wenn in (32) $p = \frac{\nu}{\alpha^2}$, $q = \frac{\nu'}{\alpha'^2}$ gesetzt wird, wegen (32) und (33)

$$|S_1| \leqq 2\sqrt{N\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{o}\,|\,\lambda \neq 0} e^{-L_{12}\frac{\sqrt{\nu\nu'}}{N\mathfrak{a}} s\lambda^2}. \tag{34}$$

Es sei nun ν eine ganze total positive Zahl, für welche die Funktion $A_s(\nu)$ abgeschätzt werden soll. Offenbar ist $A_s(\varepsilon^2\nu) = A_s(\nu)$, ich darf also ohne Beschränkung der Allgemeinheit wegen (32)

$$L_{10} < \frac{\nu}{\sqrt{N\nu}}, \qquad L_{10} < \frac{\nu'}{\sqrt{N\nu}} \tag{35}$$

voraussetzen. Ferner sei $N\nu > d^2$. Ich bilde die in § 3 beschriebene F-Zerlegung mit $M = \sqrt{N\nu} > d$. Es sei (γ, γ') ein Punkt der zu dieser F-Zerlegung gehörigen Menge $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{a}$ der Nenner von γ. Liegt dann $u, u')$ in $\mathfrak{F}_\gamma$, so ist, wenn

$$u - \gamma = \Theta, \qquad u' - \gamma' = \Theta', \qquad \gamma = \frac{a_1\omega_1 + a_2\omega_2}{b_1\omega_1 + b_2\omega_2}$$

gesetzt wird, nach (19) und (21)

$$|\Theta| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1 + b_2\omega_2|\sqrt[4]{N\nu}}, \quad |\Theta'| \leqq \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1' + b_2\omega_2'|\sqrt[4]{N\nu}} \qquad ((u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma^*), \tag{36}$$

$$|\Theta| \leqq \frac{1}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}\sqrt[4]{N\nu}}, \qquad |\Theta'| \leqq \frac{1}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}\sqrt[4]{N\nu}} \qquad ((u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma). \tag{37}$$

Es sei

$$\begin{cases} t = \dfrac{i}{\sqrt{N\nu}}, & t' = -\dfrac{i}{\sqrt{N\nu}}, \\ w = t + 2\Theta, & w' = t' + 2\Theta', \end{cases} \tag{38}$$

dann ist $\mathfrak{J}w > 0$, $\mathfrak{J}w' < 0$, und nach (31)

$$v = \frac{\pi}{\sqrt{d}} \frac{\frac{1}{\sqrt{N\nu}}}{\frac{1}{N\nu}+4\Theta^2}, \qquad v' = \frac{\pi}{\sqrt{d}} \frac{\frac{1}{\sqrt{N\nu}}}{\frac{1}{N\nu}+4\Theta'^2}.$$

Aus (36) und (37) folgt

$$\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{vv'}} \leqq L_{12}\, N\mathfrak{a}\sqrt{N\nu}\sqrt{\frac{1}{N\nu}+4\Theta^2}\sqrt{\frac{1}{N\nu}+4\Theta'^2}$$

$$\leqq \begin{cases} L_{13}\dfrac{N\mathfrak{a}}{|N(b_1\omega_1+b_2\omega_2)|}\cdot\sqrt{\dfrac{(b_1\omega_1+b_2\omega_2)^2}{\sqrt{N\nu}}+4d}\sqrt{\dfrac{(b_1\omega_1'+b_2\omega_2')^2}{\sqrt{N\nu}}+4d} \\ \qquad\qquad \text{für } (u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma^*, \\ L_{13}\sqrt{\dfrac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{N\nu}}+1}\sqrt{\dfrac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{N\nu}}+1} \quad \text{für } (u, u') \text{ in } \mathfrak{K}_\gamma. \end{cases}$$

Nun ist aber $N\mathfrak{a} \leqq M = \sqrt{N\nu}$ und ebenfalls

$$(b_1\omega_1+b_2\omega_2)^2 \leqq \sqrt{N\nu}, \qquad (b_1\omega_1'+b_2\omega_2')^2 \leqq \sqrt{N\nu},$$

sowie

$$N\mathfrak{a} \mid N(b_1\omega_1+b_2\omega_2).$$

Bei jeder der beiden Möglichkeiten für die Lage von (u, u') folgt also

$$\frac{N\mathfrak{a}}{\sqrt{vv'}} \leqq L_{14}. \tag{39}$$

Setzt man in (34) $\lambda = m\omega_1 + n\omega_2$, so steht rechts im Exponenten eine negativ definite quadratische Form in m und n; und mit Rücksicht auf die Abschätzung (39) folgt daher aus (34)

$$|S_1| \leqq L_{15}\sqrt{N\mathfrak{a}}\, e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}.$$

Aus (29) und (3) ergibt sich also: Liegt der Punkt (u, u') in $\mathfrak{F}_\gamma$, so ist

$$\vartheta(t+2u, t'+2u') = \frac{G(\gamma, 0)}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}} + H_1\frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{\sqrt{N\mathfrak{a}}\sqrt{|ww'|}}, \qquad |H_1| \leqq L_{15}; \tag{40}$$

darin ist gesetzt $t = -t' = \frac{i}{\sqrt{N\nu}}$, $w = t + 2(u-\gamma)$, $w' = t' + 2(u'-\gamma')$, $v = -\frac{\pi}{\sqrt{d}}\mathfrak{J}\frac{1}{w}$, $v' = \frac{\pi}{\sqrt{d}}\mathfrak{J}\frac{1}{w'}$.

Schreibe ich $G(\gamma, 0) = G(\gamma)$, so ist nach (28)

$$\left|\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right| \leqq \frac{2}{\sqrt{N\mathfrak{a}}}; \tag{41}$$

aus (40) folgt demnach für natürliches s

$$(42)\quad \vartheta^s(t+2u, t'+2u') = \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}\sqrt{w}\sqrt{w'}}\right)^s + H_3 \frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^{\frac{s}{2}}}, \qquad |H_3| \leqq L_{17},$$

wo (u, u') irgendeinen Punkt aus $\mathfrak{F}_\gamma$ bedeutet.

Nun ist

$$\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{d}\sqrt{N\nu}\,N\mathfrak{a}\,|ww'|};$$

daher gilt, weil die Funktion $z^a e^{-z}$ für festes $a > 0$ im Gebiet $z \geqq 0$ beschränkt ist, für $s > 4$

$$\frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^{\frac{s}{2}}} \leqq L_{18} \frac{N\nu^{\frac{s}{4}-1}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^2};$$

also

$$(43)\quad \iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma} \frac{e^{-L_{16}\frac{\sqrt{vv'}}{N\mathfrak{a}}}}{(N\mathfrak{a}\,|ww'|)^{\frac{s}{2}}}\,du\,du' \leqq L_{18}\frac{N\nu^{\frac{s}{4}-1}}{N\mathfrak{a}^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{du\,du'}{\left(\frac{1}{N\nu}+4(u-\gamma)^2\right)\left(\frac{1}{N\nu}+4(u'-\gamma')^2\right)}$$

$$= L_{19}\frac{N\nu^{\frac{s}{4}}}{N\mathfrak{a}^2}.$$

Aus (23), (42), (43) folgt nun

$$A_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \sum_\gamma{}' \left\{ \iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\,w'^{\frac{s}{2}}}\,du\,du' + H_3\frac{N\nu^{\frac{s}{4}}}{N\mathfrak{a}^2}\right\},$$

$$|H_3| \leqq L_{20},$$

wo über alle γ der F-Zerlegung summiert wird. Die Anzahl derjenigen Zahlen γ, die ein festes Ideal $\mathfrak{a}$ zum Nenner haben, ist $\varphi(\mathfrak{a}) \leqq N\mathfrak{a}$; ferner ist $N\mathfrak{a} \leqq M = \sqrt{N\nu}$, und daher

$$\sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^2} \leqq \sum_{N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{N\nu}} \frac{1}{N\mathfrak{a}} < L_{21}\log N\nu.\ ^{18})$$

Folglich gilt für $s \geqq 5$

$$(44)\quad A_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \left\{ \sum_\gamma{}' \iint\limits_{\mathfrak{F}_\gamma} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\,w'^{\frac{s}{2}}}\,du\,du' + H_4 N\nu^{\frac{s}{4}}\log N\nu\right\},$$

$$|H_4| \leqq L_{22}.$$

---

[18]) Dies folgt aus der bekannten Relation $\sum\limits_{N\mathfrak{a} \leqq x} 1 = O(x)$ durch partielle Summation. Es war $N\nu > d^2$.

§ 6.

Abschätzung der Vergleichsfunktion.

Es sei (γ, γ') ein Punkt der F-Zerlegung. Ich umgebe ihn mit dem Parallelogramm

$$u = \gamma + x\,\omega_1 + y\,\omega_2, \qquad u' = \gamma' + x\,\omega_1' + y\,\omega_2',$$
$$-\tfrac{1}{2} \leqq x < +\tfrac{1}{2}, \qquad -\tfrac{1}{2} \leqq y < +\tfrac{1}{2}.$$

Von diesem lasse ich denjenigen Teil fort, dessen Punkte denen von $\mathfrak{F}_\gamma$ kongruent (mod 1) sind. Das übrigbleibende Gebiet werde $\mathfrak{R}_\gamma$ genannt; $\mathfrak{R}_\gamma$ und $\mathfrak{F}_\gamma$ zusammen heiße E_γ. In diesem Paragraphen soll die Reihe

$$(45) \qquad S_2 = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{|N(w - 2\lambda)|^{\frac{s}{2}}} \qquad (s > 4),$$

in der λ alle ganzen Zahlen von K exkl. 0 durchläuft und

$$(46) \quad w = t + 2(u - \gamma) = \frac{i}{\sqrt{N\nu}} + 2\Theta, \quad w' = t' + 2(u' - \gamma') = -\frac{i}{\sqrt{N\nu}} + 2\Theta'$$

gesetzt ist, für alle Wertepaare (u, u') aus E_γ abgeschätzt werden.

Nach (46) ist

$$(47) \qquad |N(w - 2\lambda)|^2 = \left(\frac{1}{N\nu} + 4(\Theta - \lambda)^2\right)\left(\frac{1}{N\nu} + 4(\Theta' - \lambda')^2\right).$$

Ich werde zunächst beweisen: Für jeden Punkt (u, u') aus E_γ und jedes ganze $\lambda \neq 0$ ist

$$(48) \qquad \max(|\Theta - \lambda|, |\Theta' - \lambda'|) > L_{23}.$$

1. (u, u') liege in $\mathfrak{R}_\gamma$. Für jedes ganze $\lambda = l_1\omega_1 + l_2\omega_2 \neq 0$ ist mindestens eine der beiden Zahlen $|l_1|, |l_2| \geqq 1$, also mindestens eine der beiden Differenzen $|x - l_1|, |y - l_2| \geqq \frac{1}{2}$; wegen

$$\Theta - \lambda = (x - l_1)\omega_1 + (y - l_2)\omega_2, \qquad \Theta' - \lambda' = (x - l_1)\omega_1' + (y - l_2)\omega_2'$$

ist demnach $\max(|\Theta - \lambda|, |\Theta' - \lambda'|) > L_{24}$.

2. (u, u') liege in dem Teil $\mathfrak{K}_\gamma$ von $\mathfrak{F}_\gamma$. Dann ist nach (19)

$$(49) \quad |\Theta - \lambda| \geqq |\lambda| - \frac{1}{2\sqrt{Na}\sqrt{M}} > |\lambda| - \frac{1}{2}, \qquad |\Theta' - \lambda'| > |\lambda'| - \frac{1}{2}.$$

Nun ist λ ganz und $\neq 0$, also $|\lambda\lambda'| \geqq 1$, $\max(|\lambda|, |\lambda'|) \geqq 1$ und nach (49) $\max(|\Theta - \lambda|, |\Theta' - \lambda'|) > \frac{1}{2}$.

3. (u, u') liege in dem Teil $\mathfrak{K}_\gamma^*$ von $\mathfrak{F}_\gamma$. Dann ist nach (21)

$$|\Theta - \lambda| \geqq |\lambda| - \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1 + b_2\omega_2|\sqrt{M}}, \qquad |\Theta' - \lambda'| \geqq |\lambda'| - \frac{\sqrt{d}}{|b_1\omega_1' + b_2\omega_2'|\sqrt{M}},$$

also nach (20)

$$|\Theta-\lambda|+|\Theta'-\lambda'|\geqq|\lambda|+|\lambda'|-\frac{\sqrt{d}\,2\sqrt{M}}{N\mathfrak{a}\sqrt{M}}\geqq|\lambda|+|\lambda'|-2\sqrt{d}.$$

Für $|\lambda|+|\lambda'|\geqq 2\sqrt{d}+1$ folgt hieraus $\max(|\Theta-\lambda|,|\Theta'-\lambda'|)\geqq\frac{1}{2}$; ferner sind wegen $|\Theta\Theta'|\leqq\frac{d}{M}<1$ die Differenzen $\Theta-\lambda$ und $\Theta'-\lambda'$ nicht zugleich 0, so daß für die endlich vielen λ mit $|\lambda|+|\lambda'|<2\sqrt{d}+1$ eine Ungleichung $\max(|\Theta-\lambda|,|\Theta'-\lambda'|)>L_{25}$ gilt.

In jedem der drei betrachteten Fälle galt eine Ungleichung der Form (48); also gilt (48) allgemein.

Die Anzahl der Lösungen der Ungleichungen

$$k\leqq|\Theta-\lambda|<k+1,\qquad l\leqq|\Theta'-\lambda'|<l+1$$

in konjugierten ganzen Zahlen λ,λ' ist nun kleiner als L_{24} (vgl. den Schluß von § 2). Mit Rücksicht auf (47) und (48) folgt

$$(50)\quad S_2\leqq L_{26}\left\{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N\nu}}2L_{25}\right)^{\frac{s}{2}}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N\nu}}2k\right)^{\frac{s}{2}}}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{N\nu}}2l\right)^{\frac{s}{2}}}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(4kl)^{\frac{s}{2}}}\right\}$$

$$<L_{27}N\nu^{\frac{s}{4}}.$$

Aus (14), (45), (50) folgt

$$(51)\quad \frac{1}{u^{\frac{s}{2}}u'^{\frac{s}{2}}}=\frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_{\mu\succ 0}N\mu^{\frac{s}{2}-1}e^{\pi i S\frac{\mu z}{\sqrt{d}}}+H_5N\nu^{\frac{s}{4}},\qquad |H_5|<L_{27},$$

für (u,u') in E_γ.

§ 7.

Schluß des Beweises.

Durch die Substitution $u=\gamma+\Theta$, $u'=\gamma'+\Theta'$ führe ich in (44) Θ und Θ' als Integrationsveränderliche ein. Dadurch gehen die Gebiete $\mathfrak{F}_\gamma$, $\mathfrak{R}_\gamma$, E_γ der uu'-Ebene in Gebiete $\mathfrak{F}'_\gamma$, $\mathfrak{R}'_\gamma$, E'_γ der $\Theta\Theta'$-Ebene über. Dann sind die Punkte von E'_γ denen des Fundamental-Parallelogramms E kongruent (mod 1). Jeder äußere oder Rand-Punkt von $\mathfrak{F}'_\gamma$ hat von dem Nullpunkt $\Theta=0$, $\Theta'=0$ nach den Eigenschaften der F-Zerlegung mindestens den Abstand $\frac{1}{2\sqrt{MN\mathfrak{a}}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{N\nu}\sqrt{N\mathfrak{a}}}$. Folglich ist nach (41) und (46)

$$(52)\quad \left|\iint\limits_{\mathfrak{N}_\gamma'} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\, w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'\right| \leqq L_{28}\, N\mathfrak{a}^{-\frac{s}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\frac{1}{4\sqrt[4]{N\nu}\sqrt{N\mathfrak{a}}}}^{+\infty} \frac{d\Theta\, d\Theta'}{\left\{\left(\frac{1}{N\nu}+4\,\Theta^2\right)\left(\frac{1}{N\nu}+4\,\Theta'^2\right)\right\}^{\frac{s}{4}}}$$

$$\leqq L_{29}\, N\mathfrak{a}^{-\frac{s}{2}}\, N\nu^{\frac{s}{2}-1} \int\limits_{\frac{\sqrt[4]{N\nu}}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}}}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{s}{4}}}.$$

Für $s > 2$ ist aber mit Rücksicht auf $N\mathfrak{a} \leqq M = \sqrt{N\nu}$

$$(53)\qquad \int\limits_{\frac{\sqrt[4]{N\nu}}{2\sqrt{N\mathfrak{a}}}}^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{s}{4}}} \leqq L_{30} \left(\frac{\sqrt[4]{N\nu}}{\sqrt{N\mathfrak{a}}}\right)^{1-\frac{s}{2}}.$$

(52) und (53) liefern

$$(54)\quad \left|\sum_\gamma{}' \iint\limits_{\mathfrak{N}_\gamma'} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu u}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\, w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'\right| < L_{31}\, N\nu^{\frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)} \sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{4}}}.$$

Nun ist aber für $s \geqq 5$

$$(55)\qquad \sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{1}{2}+\frac{s}{4}}} \leqq \sum_{N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{N\nu}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{3}{4}}} < L_{32}\, N\nu^{\frac{1}{8}};\ ^{19})$$

es folgt also aus (44) wegen (54), (55) die Gleichung

$$(56)\quad A_s(\nu) = \frac{1}{\sqrt{d}}\, e^{-\pi i S\frac{\nu t}{\sqrt{d}}} \left\{\sum_\gamma{}' \iint\limits_{E_\gamma'} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu(\gamma+\Theta)}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\, w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'\right.$$

$$\left. + H_4\, N\nu^{\frac{s}{4}} \log N\nu + H_6\, N\nu^{\frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)+\frac{1}{8}}\right\},$$

$$|H_4| \leqq L_{32}, \quad |H_6| \leqq L_{33}.$$

Ich trage nun im Integranden die rechte Seite von (51) ein und erhalte

$$(57)\qquad \iint\limits_{E_\gamma'} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \frac{e^{-2\pi i S\frac{\nu(\gamma+\Theta)}{\sqrt{d}}}}{w^{\frac{s}{2}}\, w'^{\frac{s}{2}}}\, d\Theta\, d\Theta'$$

$$= \frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}} \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s \iint\limits_{E_\gamma'} \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1}\, e^{\pi i S\frac{\mu(t+2\Theta)}{\sqrt{d}}}\, e^{-2\pi i S\frac{\nu(\gamma+\Theta)}{\sqrt{d}}}\, d\Theta\, d\Theta'$$

$$+ H_7 \left|\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right|^s N\nu^{\frac{s}{4}}.$$

---

[19]) Vgl. [18]).

Der Integrand auf der rechten Seite dieser Gleichung konvergiert gleichmäßig für alle Θ, Θ'; ich darf also gliedweise integrieren. Er ändert sich ferner nicht, wenn (Θ, Θ') durch einen (mod 1) kongruenten Punkt ersetzt wird; ich darf also über E an Stelle von E'_γ integrieren. Es ist aber

$$(58) \qquad \sum_{\mu \succ 0} N\mu^{\frac{s}{2}-1} e^{\pi i S \frac{\mu t}{\sqrt{d}}} e^{-2\pi i S \frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}} \iint_E e^{2\pi i S \frac{(\mu-\nu)\Theta}{\sqrt{d}}} d\Theta\, d\Theta'$$

$$= \sqrt{d}\, e^{\pi i S \frac{\nu t}{\sqrt{d}}} N\nu^{\frac{s}{2}-1} e^{-2\pi i S \frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}}$$

und nach (41) für $s \geqq 5$

$$(59) \qquad \sum_\gamma{}' \left|\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right|^s < L_{34} \sum_\gamma{}' \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{s}{2}}} < L_{34} \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{3}{2}}} = L_{35}.$$

Aus (56), (57), (58), (59) folgt für $s \geqq 5$

$$(60) \qquad A_s(\nu) = \frac{\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s-1}{2}}} N\nu^{\frac{s}{2}-1} \sum_\gamma{}' \left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}}$$

$$+ H_8\, e^{-\pi i S \frac{\nu t}{\sqrt{d}}} N\nu^{\frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right)+\frac{1}{8}} \log N\nu,$$

$$|H_8| < L_{36}.$$

In der Summe $\sum\limits_\gamma{}'$ durchläuft γ ein System solcher (mod 1) inkongruenten Zahlen aus K, deren Nenner $\mathfrak{a}$ eine Norm $N\mathfrak{a} \leqq \sqrt{N\nu}$ haben. Hebt man letztere Beschränkung auf, so ändert sich die rechte Seite von (60) um eine Größe vom absoluten Betrage

$$(61) \qquad < L_{37} N\nu^{\frac{s}{2}-1} \sum_{N\mathfrak{a} > \sqrt{N\nu}} \frac{1}{N\mathfrak{a}^{\frac{s}{2}-1}} < L_{38} N\nu^{\frac{s}{4}}.$$

Ferner ist nach (35)

$$\frac{\nu}{\sqrt{N\nu}} < \frac{1}{L_{10}}, \qquad \frac{\nu'}{\sqrt{N\nu}} < \frac{1}{L_{10}},$$

also nach (38)

$$(62) \qquad \left|e^{-\pi i S \frac{\nu t}{\sqrt{d}}}\right| = \left|e^{-\pi i\left(\frac{\nu t}{\sqrt{d}\sqrt{N\nu}} + \frac{\nu' t}{\sqrt{d}\sqrt{N\nu}}\right)}\right| < L_{39}.$$

Da nun für $s \geqq 5$

$$\frac{s}{4} < \frac{s}{2} - 1, \qquad \frac{3}{4}\left(\frac{s}{2}-1\right) + \frac{1}{8} < \frac{s}{2} - 1$$

gilt, so folgt aus (60), (61), (62)

$$(63)\qquad A_s(\nu)=\frac{\pi^s N\nu^{\frac{s}{2}-1}}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)d^{\frac{s-1}{2}}}\sum_\gamma\left(\frac{G(\gamma)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\gamma}{\sqrt{d}}}+o\left(N\nu^{\frac{s}{2}-1}\right);$$

in der Summe durchläuft γ ein vollständiges System (mod 1) inkongruenter Zahlen aus K, d. h. ein vollständiges System von solchen Zahlen des Körpers, deren Differenzen nicht ganz sind. Diese unendliche Summe nenne ich die $\mathfrak{S}$-*Reihe*; sie soll im folgenden Paragraphen näher untersucht werden.

§ 8.
Summation der $\mathfrak{S}$-Reihe.

Zunächst wird die $\mathfrak{S}$-Reihe als unendliches Produkt geschrieben. Setzt man für festes ganzes ν und natürliches s

$$H(\mathfrak{a})=\sum_\delta\left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}},$$

wo $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal bedeutet und δ ein vollständiges System von $\varphi(\mathfrak{a})$ mod 1 inkongruenten Brüchen mit dem Nenner $\mathfrak{a}$ durchläuft, so ist für $s\geqq 5$

$$\mathfrak{S}=\sum_{\mathfrak{a}}H(\mathfrak{a});$$

hierin durchläuft $\mathfrak{a}$ alle (ganzen) Ideale.

Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei teilerfremde Ideale. Durchläuft $\varkappa$ ein vollständiges System mod 1 verschiedener Brüche vom Nenner $\mathfrak{a}$, λ ein vollständiges System mit dem Nenner $\mathfrak{b}$, so durchläuft $\mu=\varkappa+\lambda$ ein vollständiges System mit dem Nenner $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Folglich ist

$$(64)\qquad H(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=\sum_\mu\left(\frac{G(\mu)}{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu\mu}{\sqrt{d}}}=\sum_{\varkappa,\lambda}\left(\frac{G(\varkappa+\lambda)}{N\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)^s e^{-2\pi i S\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{\sqrt{d}}}$$

In

$$G(\varkappa+\lambda)=\sum_{\varrho \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{b}} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2(\varkappa+\lambda)}{\sqrt{d}}}$$

setze ich $\varrho=\sigma+\tau$, wo σ ein vollständiges System mod $\mathfrak{a}$ inkongruenter durch $\mathfrak{b}$ teilbarer Zahlen und τ ein vollständiges System mod $\mathfrak{b}$ inkongruenter durch $\mathfrak{a}$ teilbarer Zahlen durchläuft; dann wird

$$(65)\qquad G(\varkappa+\lambda)=\sum_{\sigma \bmod \mathfrak{a}}\ \sum_{\tau \bmod \mathfrak{b}} e^{2\pi i S\frac{\sigma^2\varkappa+\tau^2\lambda}{\sqrt{d}}}=G(\varkappa)\,G(\lambda).$$

Aus (64), (65) folgt

$$H(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \sum_{\varkappa} \left(\frac{G(\varkappa)}{N\mathfrak{a}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa}{\sqrt{d}}} \sum_{\lambda} \left(\frac{G(\lambda)}{N\mathfrak{b}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\lambda}{\sqrt{d}}} = H(\mathfrak{a})\, H(\mathfrak{b}).$$

Demnach gestattet (für $s \geqq 5$) die $\mathfrak{S}$-Reihe die Produktzerlegung

$$\mathfrak{S} = \prod_{\mathfrak{p}} J(\mathfrak{p}), \qquad J(\mathfrak{p}) = 1 + H(\mathfrak{p}) + H(\mathfrak{p}^2) + \dots, \text{ [20]}$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale aus K durchläuft.

Bei der Berechnung von $J(\mathfrak{p})$ behandele ich zunächst den Fall $\mathfrak{p} \nmid 2$.

Es sei a eine natürliche Zahl und δ eine Zahl aus K vom Nenner $\mathfrak{p}^a$. Ist dann $\varkappa$ ganz und nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar, so ist[21])

$$G(\varkappa\delta) = \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^a G(\delta),$$

wo $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)$ das quadratische Restsymbol bedeutet, und daher

$$H(\mathfrak{p}^a) = \left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s \sum_{\varkappa} \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}}; \tag{66}$$

hierin durchläuft $\varkappa$ ein System von $\varphi(\mathfrak{p}^a)$ mod $\mathfrak{p}^a$ inkongruenten zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen. Ist $a \geqq 2$, so durchlaufe ϱ ein vollständiges System von $N\mathfrak{p}^{a-1}$ mod $\mathfrak{p}^{a-1}$ inkongruenten Zahlen, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem mod $\mathfrak{p}$; ferner sei π eine genau durch $\mathfrak{p}^1$ teilbare Zahl und $\varkappa = \varkappa_1 + \pi\varrho$, dann ist

$$\sum_{\varkappa} \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{\varrho} e^{-2\pi i S \frac{\nu\pi\varrho\delta}{\sqrt{d}}}.$$

Nach (27) ist nun $\sum\limits_{\varrho} = 0$ für $\mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu$,[22]) $= N\mathfrak{p}^{a-1}$ für $\mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu$; also

$$\sum_{\varkappa} \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu, \quad = N\mathfrak{p}^{a-1} \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \tag{67}$$

für $\mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu$. Dies gilt auch für $a = 1$.

---

[20]) Nach (41) ist

$$|H(\mathfrak{a})| \leqq \left(\frac{2}{\sqrt{N\mathfrak{a}}}\right)^s N\mathfrak{a},$$

also

$$|J(\mathfrak{p}) - 1| \leqq \frac{2^s}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1} - 1},$$

so daß $\prod\limits_{\mathfrak{p}} J(\mathfrak{p})$ für $s \geqq 5$ absolut konvergiert.

[21]) Vgl. Hecke, R.

[22]) Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale aus K, so bedeutet das Symbol $\mathfrak{a} \nmid \mathfrak{b}$, daß $\mathfrak{b}$ nicht durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, also das Gegenteil von $\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}$. Geht ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{b}$ genau zur k-ten Potenz auf, so wird dies (nach Hardy und Littlewood) durch $\mathfrak{p}^k \| \mathfrak{b}$ bezeichnet.

Im Falle $\mathfrak{p}^{a-1} | \nu$ (der für $a = 1$ stets vorliegt) ist noch $\sum\limits_{\varkappa_1}$ zu berechnen. Ist auch noch $\mathfrak{p}^a | \nu$, so ist $\nu \varkappa_1 \delta$ ganz und daher

$$(68) \qquad \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu \varkappa_1 \delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as},$$

also $= 0$ für ungerades as, $= N\mathfrak{p} - 1$ für gerades as [23]); ist dagegen $\mathfrak{p}^a \nmid \nu$, so hat $\nu \varkappa_1 \delta$ den Nenner $\mathfrak{p}$ und es ist

$$(69) \qquad \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{\varkappa_1}{\mathfrak{p}}\right)^{as} e^{-2\pi i S \frac{\nu \varkappa_1 \delta}{\sqrt{d}}} = G(-\nu\delta) \text{ für ungerades } as,$$
$$= -1 \text{ [24]) für gerades } as.$$

Aus (66), (67), (68), (69) folgt

$$(70) \qquad H(\mathfrak{p}^a) = 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu,$$
$$= N\mathfrak{p}^{a-1} \left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s G(-\nu\delta) \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} | \nu, \ as \text{ ungerade},$$
$$= -N\mathfrak{p}^{a-1} \left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} | \nu, \ as \text{ gerade},$$
$$= 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^a | \nu, \ as \text{ ungerade},$$
$$= N\mathfrak{p}^{a-1}(N\mathfrak{p} - 1) \left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s \quad \text{für } \mathfrak{p}^a | \nu, \ as \text{ gerade}.$$

Nun ist für gerades a die Gaußsche Summe $G(\delta) = N\mathfrak{p}^{\frac{a}{2}}$. Ferner ist für ungerades a, wenn λ_1 eine genau durch $\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}}$ teilbare ganze Zahl bedeutet und λ_2 ein Bruch mit dem Nenner $\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}}$ ist,

$$G(\delta) = N\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}} G(\lambda_2^2 \delta) \text{ [25])}$$

und

$$G(-\nu\delta) = G(-\nu \lambda_1^2 \lambda_2^2 \delta) = \left(\frac{\lambda_1^2 \nu}{\mathfrak{p}}\right) G(-\lambda_2^2 \delta) \qquad (\mathfrak{p}^{a-1} | \nu),$$

also für ungerades as und $\mathfrak{p}^{a-1} | \nu$

$$(71) \qquad \left(\frac{G(\delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^s G(-\nu\delta) = \left(\frac{\lambda_1^2 \nu}{\mathfrak{p}}\right) \left(\frac{N\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}} G(\lambda_2^2 \delta)}{N\mathfrak{p}^a}\right)^{s-1} \frac{N\mathfrak{p}^{\frac{a-1}{2}} N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^a}. \text{ [26])}$$

---

[23]) Es gibt $\frac{N\mathfrak{p} - 1}{2}$ quadratische Reste und $\frac{N\mathfrak{p} - 1}{2}$ Nichtreste mod $\mathfrak{p}$.

[24]) Wegen $\mathfrak{p} \nmid \varkappa_1$ und (27).

[25]) Vgl. Hecke, R.

[26]) Nach (24), (27) ist

$$G(-\lambda_2^2 \delta)\, G(\lambda_2^2 \delta) = |G(\lambda_2^2 \delta)|^2 = N\mathfrak{p}.$$

Mit Rücksicht auf (71) geht (70) über in

$$
\begin{aligned}
(72)\quad H(\mathfrak{p}^a) &= 0 \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \nmid \nu \text{ und für } \mathfrak{p}^a \mid \nu,\ as \text{ ungerade},\\
&= \left(\frac{\lambda_1^2 \nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{G(\lambda_1^2\delta)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^{s-1} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)+1}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu,\ as \text{ ungerade},\\
&= -\left(\frac{G(\lambda_1^2\delta)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^{s} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1} \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu,\ a \text{ ungerade, } s \text{ gerade},\\
&= -N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1} \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a-1} \mid \nu,\ a \text{ gerade},\\
&= \left(\frac{G(\lambda_1^2\delta)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^{s} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1}(N\mathfrak{p}-1) \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a} \mid \nu,\ a \text{ ungerade, } s \text{ gerade},\\
&= N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}-1}(N\mathfrak{p}-1) \quad \text{für } \mathfrak{p}^{a} \mid \nu,\ a \text{ gerade}.
\end{aligned}
$$

Nun ist, wenn kurz $\lambda_1^2\delta = \delta_1$ gesetzt wird, δ_1 vom Nenner $\mathfrak{p}$ und

$$
G(\delta_1) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{p}} e^{2\pi i S \frac{\varrho^2\delta_1}{\sqrt{d}}}, \qquad \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right) G(\delta_1) = \sum_{\varrho \bmod \mathfrak{p}} e^{-2\pi i S \frac{\varrho^2\delta_1}{\sqrt{d}}},
$$

also

$$
(73)\qquad \left(\frac{G(\delta_1)}{\sqrt{N\mathfrak{p}}}\right)^2 = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\frac{|G(\delta_1)|^2}{N\mathfrak{p}} = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right).
$$

Für *gerades* s folgt aus (72), (73): Geht das Primideal $\mathfrak{p} \nmid 2$ in ν genau zur n-ten Potenz auf, so ist

$$
\begin{aligned}
(74)\quad J(\mathfrak{p}) &= 1 + \sum_{a=1}^{\infty} H(\mathfrak{p}^a)\\
&= 1 + \frac{N\mathfrak{p}-1}{N\mathfrak{p}} \sum_{a=1}^{n} \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{a\frac{s}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{a(s-2)}{2}} - \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{(n+1)\frac{s}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{(n+1)(s-2)}{2}-1}\\
&= \left(1 - \frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s}{2}}}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}}}\right) \sum_{a=0}^{n} \left(\frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s}{2}}}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1}}\right)^{a}.
\end{aligned}
$$

Für *ungerades* s folgt aus (72), (73): Geht $\mathfrak{p}$ in ν genau zu einer *ungeraden* Potenz $n = 2k+1$ auf, so ist

$$
\begin{aligned}
(75)\quad J(\mathfrak{p}) &= 1 + \sum_{b=1}^{k} N\mathfrak{p}^{-b(s-2)-1}(N\mathfrak{p}-1) - N\mathfrak{p}^{-(k+1)(s-2)-1}\\
&= \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}}\right) \sum_{b=0}^{k} \frac{1}{N\mathfrak{p}^{b(s-2)}};
\end{aligned}
$$

geht aber $\mathfrak{p}$ in ν genau zu einer *geraden* Potenz $n = 2k$ auf, so ist

$$(76)\quad J(\mathfrak{p}) = 1 + \sum_{b=1}^{k} N\mathfrak{p}^{-b(s-2)-1}(N\mathfrak{p}-1) + \left(\frac{\lambda_2^2\nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s-1}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{(2k+1)(s-2)+1}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{s-1}}\right)\sum_{b=0}^{k-1}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{b(s-2)}} + \left\{1 + \left(\frac{\lambda_2^2\nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s-1}{2}}\right\}\frac{1}{N\mathfrak{p}^{k(s-2)}},\text{[27]}$$

wo λ_2 einen Bruch mit dem Nenner $\mathfrak{p}^k$ bedeutet.

Für gerades $s \geqq 6$ ist nach (74)

$$J(\mathfrak{p}) > \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1}}\right)^2,$$

also, wenn ζ_K die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers K bedeutet,

$$(77)\qquad \prod_{\mathfrak{p} \neq 2} J(\mathfrak{p}) > \prod_{\mathfrak{p} \neq 2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}-1}}\right)^2 > \zeta_K^{-2}\left(\frac{s}{2}-1\right) \geqq \zeta_K^{-2}(2);$$

und für ungerades $s \geqq 5$ ist nach (75), (76)

$$J(\mathfrak{p}) \geqq 1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s-1}{2}}},$$

$$(78)\qquad \prod_{\mathfrak{p} \neq 2} J(\mathfrak{p}) \geqq \prod_{\mathfrak{p} \neq 2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{\frac{s-1}{2}}}\right) > \zeta_K^{-1}\left(\frac{s-1}{2}\right) \geqq \zeta_K^{-1}(2).$$

Wegen (77), (78) liegt die $\mathfrak{S}$-Reihe dann und nur dann zwischen zwei positiven von ν unabhängigen Schranken, wenn dies für $J(\mathfrak{l})$ gilt, wo $\mathfrak{l}$ einen Primidealteiler von 2 bedeutet. Ferner ist nach (74), (75), (76) $J(\mathfrak{p})$ stets *rational* und für $\mathfrak{p} \nmid \nu$

$$(79)\qquad J(\mathfrak{p}) = 1 - \frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{s}{2}}}{N\mathfrak{p}^{\frac{s}{2}}} \qquad \text{für gerades } s,$$

$$= 1 + \frac{\left(\frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}}\nu}{\mathfrak{p}}\right)}{N\mathfrak{p}^{\frac{s-1}{2}}} \qquad \text{für ungerades } s.$$

Führt man zur Abkürzung die folgenden Zetafunktionen mit Charakteren ein:

$$\zeta_1(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\left(\frac{-1}{\mathfrak{a}}\right)}{N\mathfrak{a}^s}, \qquad \zeta_2(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\left(\frac{\nu}{\mathfrak{a}}\right)}{N\mathfrak{a}^s}, \qquad \zeta_3(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\left(\frac{-\nu}{\mathfrak{a}}\right)}{N\mathfrak{a}^s},$$

---

[27]) Für $k = 0$ ist $\lambda_2 = 1$ und $J(\mathfrak{p})$ gleich dem Ausdruck in der geschweiften Klammer rechts.

so ist nach (79), wenn c_1, c_2, c_3, c_4 *rationale* Zahlen bezeichnen, die zwischen zwei positiven von ν unabhängigen Schranken liegen,

$$
\begin{aligned}
(80) \qquad \prod_{\mathfrak{p}+\mathfrak{l}} J(\mathfrak{p}) &= \frac{c_1}{\zeta_K\left(\frac{s}{2}\right)} && \text{für } s \equiv 0 \pmod 4,\\
&= \frac{c_2}{\zeta_1\left(\frac{s}{2}\right)} && \text{für } s \equiv 2 \pmod 4,\\
&= \frac{c_3 \zeta_2\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\zeta_K(s-1)} && \text{für } s \equiv 1 \pmod 4,\\
&= \frac{c_4 \zeta_3\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\zeta_K(s-1)} && \text{für } s \equiv 3 \pmod 4.
\end{aligned}
$$

Die Summation der $\mathfrak{S}$-Reihe ist damit zurückgeführt auf die Ermittlung der Werte der Zetafunktionen und die Summation von $J(\mathfrak{p})$ für $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \mid 2$.

Das Primideal $\mathfrak{l}$ gehe in 2 genau zur c-ten Potenz auf, in ν genau zur k-ten. Es sei a eine natürliche Zahl, und zwar $> k + 2c + 1$ für gerades k, $> k + 2c$ für ungerades k; ferner sei λ_1 eine genau durch $\mathfrak{l}^{\left[\frac{a}{2}\right]-c}$ teilbare ganze Zahl und δ eine Zahl mit dem Nenner $\mathfrak{l}^a$. Dann ist

$$
(81) \qquad G(\delta) = N\mathfrak{l}^{\left[\frac{a}{2}\right]-c}\, G(\lambda_1^2 \delta).\text{[28]}
$$

Es sei λ_2 ganz und genau durch $\mathfrak{l}^{a-k-1}$ teilbar; ϱ durchlaufe ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{l}^{k+1}$, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem mod $\mathfrak{l}^{a-k-1}$; dann durchläuft $\varkappa = \lambda_2 \varrho + \varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem mod $\mathfrak{l}^a$, und es gilt nach (81)

$$
H(\mathfrak{l}^a) = \sum_{\varkappa} \left(\frac{G(\varkappa\delta)}{N\mathfrak{l}^a}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1} \sum_{\varrho} \left(\frac{G(\lambda_1^2(\lambda_2\varrho + \varkappa_1)\delta)}{N\mathfrak{l}^{a-\left[\frac{a}{2}\right]+c}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu(\lambda_2\varrho+\varkappa_1)\delta}{\sqrt{d}}}
$$

$$
= \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)}{N\mathfrak{l}^{a-\left[\frac{a}{2}\right]+c}}\right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{\varrho} e^{-2\pi i S \frac{\nu\lambda_2\varrho\delta}{\sqrt{d}}}.\text{[29]}
$$

Die Zahl $\nu\lambda_2\delta$ hat den Nenner $\mathfrak{l}$; folglich ist $\sum\limits_{\varrho} = 0$ und

$$
(82) \qquad H(\mathfrak{l}^a) = 0 \quad \text{für} \quad a > \begin{cases} k + 2c + 1, & k \text{ gerade},\\ k + 2c, & k \text{ ungerade}. \end{cases}
$$

---

[28]) Vgl. Hecke, R.

[29]) Es ist $2\left[\frac{a}{2}\right] - 2c + a - k - 1 - a \geq 0$, also $\lambda_1^2\lambda_2\delta$ ganz und $G(\lambda_1^2(\lambda_2\varrho + \varkappa_1)\delta) = G(\lambda_1^2\varkappa_1\delta)$.

Daher ist $J(\mathfrak{l})$ eine *endliche* Summe; und da ferner $H(\mathfrak{l}^a)$ für jedes a rational ist, so ist $J(\mathfrak{l})$ selbst *rational*.

Nach (41) ist

$$(83)\qquad |H(\mathfrak{l}^a)| \leqq \varphi(\mathfrak{l}^a)\left(\frac{2}{N\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}}}\right)^s = 2^s\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{l}}\right)N\mathfrak{l}^{-a\left(\frac{s}{2}-1\right)}.$$

Nun ist $N\mathfrak{l} = 2$ oder $= 4$, und nach (83) für $s \geqq 5$, $N\mathfrak{l} = 2$

$$(84)\quad \left|\sum_{a=3}^{\infty} H(\mathfrak{l}^a)\right| \leqq 2^{s-1}\sum_{a=3}^{\infty}\frac{1}{2^{a\left(\frac{s}{2}-1\right)}} = \frac{2^{s-1}}{2^{s-2}\left(2^{\frac{s}{2}-1}-1\right)} \leqq \frac{2}{2^{\frac{3}{2}}-1} < \sqrt{2},$$

und für $N\mathfrak{l} = 4$

$$(85)\qquad \left|\sum_{a=2}^{\infty} H(\mathfrak{l}^a)\right| \leqq 2^s\frac{3}{4}\sum_{a=2}^{\infty}\frac{1}{2^{a(s-2)}} = \frac{3\cdot 2^{s-2}}{2^{s-2}(2^{s-2}-1)} \leqq \frac{3}{7}.$$

Durchläuft ϱ ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{l}$, so gilt das gleiche von ϱ^2, denn aus $\varrho_1^2 \equiv \varrho_2^2 \pmod{\mathfrak{l}}$ folgt $\varrho_1 \equiv \pm\varrho_2 \equiv \varrho_2 \pmod{\mathfrak{l}}$. Hat δ den Nenner $\mathfrak{l}$, so ist also nach (27)

$$G(\delta) = \sum_{\varrho} e^{2\pi i S\frac{\varrho^2\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varrho} e^{2\pi i S\frac{\varrho\delta}{\sqrt{d}}} = 0$$

und daher auch

$$(86)\qquad H(\mathfrak{l}) = 0.$$

Zur Bestimmung von $H(\mathfrak{l}^2)$, $H(\mathfrak{l}^3)$, $\ldots$ erscheint es notwendig, auf arithmetische Eigenschaften der *Basis* von K einzugehen. Der Körper K werde erzeugt durch die Quadratwurzel aus einer quadratfreien natürlichen Zahl $m > 1$. Ist dann $m \equiv 1 \pmod 4$, so ist $\left(1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}\right)$ eine Basis des Körpers $K(\sqrt{m})$ mit der Grundzahl $d = m$; ist aber $m \equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$, so hat der Körper $K(\sqrt{m})$ die Basis $(1, \sqrt{m})$ und die Grundzahl $d = 4m$.

Ich unterscheide drei Fälle:

1. $m \equiv 5 \pmod 8$. Dann ist $\mathfrak{l} = 2$ Primideal in $K(\sqrt{m})$ und nach (85), (86)

$$(87)\qquad J(\mathfrak{l}) \geqq 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$

2. $m \equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$. Dann ist $2 = \mathfrak{l}^2$ Quadrat des Primideals $\mathfrak{l}$ in $K(\sqrt{m})$. Die Zahlen $\varrho = 0, 1, \sqrt{m}, 1+\sqrt{m}$ bilden ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{l}^2$, und es ist $\varrho^2 \equiv 0, 1, 0, 1$ oder $\equiv 0, 1, 1, 0 \pmod 2$. Ferner bilden die Zahlen $\delta = \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{m}}{2}$ oder $\delta = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{m}}{2}$ ein vollständiges System von $\varphi(\mathfrak{l}^2)$ mod 1 inkongruenten Brüchen vom Nenner $\mathfrak{l}^2$, und es ist

$$\varrho^2\delta \equiv 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \equiv 0, \frac{1+\sqrt{m}}{2}, 0, \frac{1+\sqrt{m}}{2} \pmod 1$$

oder

$$\varrho^2\delta \equiv 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \quad \text{und} \quad \equiv 0, \frac{\sqrt{m}}{2}, \frac{\sqrt{m}}{2}, 0 \pmod 1.$$

Folglich ist

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = 4, \quad G\left(\frac{1+\sqrt{m}}{2}\right) = 0, \quad G\left(\frac{\sqrt{m}}{2}\right) = 0,$$

also

$$H(\mathfrak{l}^2) = e^{-2\pi i S \frac{\nu\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{d}}} = e^{-\frac{\pi i}{2} S \frac{\nu}{\sqrt{m}}}.$$

Die Zahl $H(\mathfrak{l}^2)$ ist also $=+1$ oder $=-1$, je nachdem in

$$\nu = n_1 + n_2\sqrt{m}$$

der Koeffizient $n_2 \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 2$ ist. Für *gerades* n_2 ist daher nach (84), (86)

$$(88) \qquad J(\mathfrak{l}) \geqq 1 + 1 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

Für *ungerades* n_2 läßt sich aber ν garnicht als Summe von Quadraten ganzer Zahlen darstellen[30]). Dann geht ferner $\mathfrak{l}$ in ν überhaupt nicht oder nur in der ersten Potenz auf. Wegen (82) liefern daher alle zu $\nu \pmod{\mathfrak{l}^3}$ kongruenten Zahlen $\bar{\nu}$ denselben Wert von $J(\mathfrak{l})$. Durchläuft $\bar{\nu}$ eine Folge total positiver Zahlen mit $N\bar{\nu} \to \infty$, so folgt aus (63) wegen $A_s(\bar{\nu}) = 0$

$$\mathfrak{S} = J(\mathfrak{l}) \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}} J(\mathfrak{p}) \to 0,$$

also nach (77), (78)

$$J(\mathfrak{l}) = 0 \quad (\text{für ungerades } n_2).$$

Dasselbe folgt natürlich bei direkter Berechnung von $J(\mathfrak{l})$.

3. $m \equiv 1 \pmod 8$. Dann ist $2 = \mathfrak{l}\mathfrak{l}'$ Produkt von zwei verschiedenen Primidealen $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}'$. In diesem Fall 3 ist die Berechnung von $H(\mathfrak{l}^a)$ $(a = 2, 3, \ldots)$ einfacher als in den beiden vorhergehenden Fällen; ich will sie daher wirklich ausführen.

Zunächst sei $a > 2$ und gerade, λ_1 genau durch $\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}-1}$ teilbar, λ_2 genau durch $\mathfrak{l}^2$. ϱ durchlaufe ein vollständiges Restsystem $\bmod\, \mathfrak{l}^{a-2}$, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\bmod\, \mathfrak{l}^2$, also $\varkappa = \lambda_2\varrho + \varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\bmod\, \mathfrak{l}^a$. Dann ist, wenn δ den Nenner $\mathfrak{l}^a$ hat, nach (81)

$$G(\delta) = N\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}-1} G(\lambda_1^2\delta),$$

[30]) In $(a+b\sqrt{m})^2 = a^2 + b^2m + 2ab\sqrt{m}$ hat nämlich $\sqrt{m}$ einen *geraden* Koeffizienten; das gleiche gilt also von jeder Summe ganzer Quadratzahlen.

also[31])

$$H(\mathfrak{l}^a) = \sum_{\varkappa} \left(\frac{G(\varkappa\delta)}{N\mathfrak{l}^a} \right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa\delta}{\sqrt{d}}} = \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{G(\lambda_1^2 \varkappa_1 \delta)}{N\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}+1}} \right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{\varrho} e^{-2\pi i S \frac{\nu\lambda_2\varrho\delta}{\sqrt{d}}}.$$

Hierin ist $\sum\limits_{\varrho} = 0$ außer für $\mathfrak{l}^{a-2} \mid \nu$, und dann $= N\mathfrak{l}^{a-2}$; im letzteren Fall wird

$$(89) \qquad H(\mathfrak{l}^a) = 2^{-(a-2)\left(\frac{s}{2}-1\right)} \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{G(\lambda_1^2 \varkappa_1 \delta)}{N\mathfrak{l}^2} \right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \qquad (\mathfrak{l}^{a-2} \mid \nu).$$

Nun sei $a = 2$ und δ vom Nenner $\mathfrak{l}^2$. Dann ist

$$G(\delta) = \sum_{k=0}^{3} e^{2\pi i S \frac{k^2\delta}{\sqrt{d}}} = 2\left(1 + e^{2\pi i S \frac{\delta}{\sqrt{d}}}\right), \quad G(3\delta) = 2\left(1 + e^{-2\pi i S \frac{\delta}{\sqrt{d}}}\right),$$

$$(90) \quad H(\mathfrak{l}^2) = \left(\frac{1 + e^{2\pi i S \frac{\delta}{\sqrt{d}}}}{2} \right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}} + \left(\frac{1 + e^{-2\pi i S \frac{\delta}{\sqrt{d}}}}{2\cdot} \right)^s e^{2\pi i S \frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}}$$

$$= 2\cos^s\left(\pi S \frac{\delta}{\sqrt{d}}\right) \cos\left\{ 2\pi S \frac{\left(\nu - \frac{s}{2}\right)\delta}{\sqrt{d}} \right\}.$$

Aus (89), (90) folgt für gerades $a \geqq 2$, wenn δ und δ_1 die Nenner $\mathfrak{l}^2$ und $\mathfrak{l}^{\frac{a}{2}-1}$ besitzen,

$$(91) \qquad H(\mathfrak{l}^a) = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-2} \nmid \nu,$$

$$= 2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)} \left\{ \sqrt{2} \cos\left(\pi S \frac{\delta}{\sqrt{d}}\right) \right\}^s \cos\left\{ 2\pi S \frac{\left(\nu\delta_1^2 - \frac{s}{2}\right)\delta}{\sqrt{d}} \right\}$$

$$\text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-2} \mid \nu.$$

Jetzt sei $a > 3$ und ungerade, λ_1 genau durch $\mathfrak{l}^{\frac{a-3}{2}}$ teilbar, λ_2 genau durch $\mathfrak{l}^3$. ϱ durchlaufe ein vollständiges Restsystem $\bmod \mathfrak{l}^{a-3}$, $\varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\bmod \mathfrak{l}^3$, also $\varkappa = \lambda_2\varrho + \varkappa_1$ ein reduziertes Restsystem $\bmod \mathfrak{l}^a$. Dann ist, wenn δ den Nenner $\mathfrak{l}^a$ hat, nach (81)

$$G(\delta) = N\mathfrak{l}^{\frac{a-3}{2}} G(\lambda_1^2\delta);$$

folglich

$$(92) \qquad H(\mathfrak{l}^a) = \sum_{\varkappa_1} \left(\frac{G(\lambda_1^2 \varkappa_1 \delta)}{N\mathfrak{l}^{\frac{a+3}{2}}} \right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{\varrho} e^{-2\pi i S \frac{\nu\lambda_2\varrho\delta}{\sqrt{d}}},$$

also $= 0$ für $\mathfrak{l}^{a-3} \nmid \nu$, $= 2^{-(a-3)\left(\frac{s}{2}-1\right)} \sum\limits_{\varkappa_1} \left(\frac{G(\lambda_1^2 \varkappa_1 \delta)}{N\mathfrak{l}^3} \right)^s e^{-2\pi i S \frac{\nu\varkappa_1\delta}{\sqrt{d}}}$ für $\mathfrak{l}^{a-3} \mid \nu$.

[31]) Vgl. die Ableitung von (82).

Endlich sei $a = 3$ und δ vom Nenner $\mathfrak{l}^3$. Dann ist

$$G(\delta) = \sum_{k=0}^{7} e^{2\pi i S \frac{k^2\delta}{\sqrt{d}}} = 4\, e^{2\pi i S \frac{\delta}{\sqrt{d}}},$$

$$(93)\quad H(\mathfrak{l}^3) = \sum_{n=1,3,5,7} \left(\frac{e^{2\pi i n S \frac{\delta}{\sqrt{d}}}}{2}\right)^{s} e^{-2\pi i n S \frac{\nu\delta}{\sqrt{d}}} = 2^{-s} e^{2\pi i S \frac{(s-\nu)\delta}{\sqrt{d}}} \sum_{m=0}^{3} e^{4\pi i m S \frac{(s-\nu)\delta}{\sqrt{d}}}$$

$$= 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^2 \nmid (s-\nu), \quad = 2^{2-s} e^{2\pi i S \frac{(s-\nu)\delta}{\sqrt{d}}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^2 \mid (s-\nu).$$

Aus (92), (93) folgt für ungerades $a \geqq 3$, wenn δ und δ_1 die Nenner $\mathfrak{l}^3$ und $\mathfrak{l}^{\frac{a-3}{2}}$ besitzen,

$$(94)\qquad \begin{aligned} H(\mathfrak{l}^a) &= 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-3} \nmid \nu, \\ &= 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-3} \mid \nu, \quad \mathfrak{l}^2 \nmid (s - \nu\delta_1^2), \\ &= 2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)} e^{2\pi i S \frac{(s-\nu\delta_1^2)\delta}{\sqrt{d}}} \quad \text{für} \quad \mathfrak{l}^{a-3} \mid \nu, \quad \mathfrak{l}^2 \mid (s-\nu\delta_1^2). \end{aligned}$$

In (91) kann $\delta = \left(\frac{1+\sqrt{m}}{4}\right)^2 = \frac{1+m+2\sqrt{m}}{16}$ gesetzt werden; dann ist $\sqrt{2}\cos\left(\pi S \frac{\delta}{\sqrt{d}}\right) = 1$. Nach (91), (94) gilt daher für jedes natürliche $a \geqq 2$

$$H(\mathfrak{l}^a) \geqq -2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)};$$

also mit Rücksicht auf (86) für $s \geqq 5$

$$(95)\qquad J(\mathfrak{l}) > 1 - \sum_{a=2}^{\infty} 2^{-(a-1)\left(\frac{s}{2}-1\right)} = 1 - \frac{1}{2^{\frac{s}{2}-1}-1} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus (87), (88), (95) folgt für jede der drei in Betracht gezogenen Möglichkeiten für m die Ungleichung $J(\mathfrak{l}) > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$; dabei ist in den Fällen $m \equiv 2$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ die Zahl ν in der Form $a + b\sqrt{m}$ mit geradem b anzunehmen. Wegen (80) existiert also ein nur von K abhängiges positives L_{40}, so daß für alle total positiven ganzen ν[32]) die $\mathfrak{S}$-Reihe $\geqq L_{40}$ ist. Aus (63) folgt nun Formel (1).

Zu jedem $s \geqq 5$ gibt es daher ein nur von K und s abhängiges natürliches L_{41} derart, daß sich alle total positiven ganzen durch 2 teilbaren Zahlen, deren Norm $> L_{41}$ ist, als Summen von s Quadraten ganzer Zahlen darstellen lassen. Folglich ist für *jedes* ganze $\nu \succ 0$ die Zahl

[32]) $\nu = a + b\sqrt{m}$ mit geradem b im Falle $m \equiv 2, 3 \pmod 4$.

$4L_{41}^2\nu$ Summe von s Quadraten ganzer Zahlen, also ν Summe von s Quadraten *ganzer* oder *solcher gebrochener* Zahlen, deren Nenner in $2L_{41}$ aufgehen. Für $s = 5$ ist dies der in der Einleitung genannte zweite Satz.

Die Berechnung der $\mathfrak{S}$-Reihe ist im Vorhergehenden auf die Bestimmung der Werte einer ζ-Funktion[33]) für gewisse natürliche Argumente zurückgeführt worden. Diese Bestimmung werde ich für den besonders einfachen Fall $s \equiv 0 \pmod 4$ ausführen; dabei mache ich noch die Einschränkung $m = d \equiv 1 \pmod 8$, da nur für diesen Fall die Größe $J(\mathfrak{l})$ ausgerechnet worden ist. Es sei $s = 4\sigma$.

Nach (74) ist für $\mathfrak{p} \nmid 2$, $\mathfrak{p}^n \mid \nu$

$$J(\mathfrak{p}) = \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}}\right)\left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma-1}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(2\sigma-1)}} + \dots + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{n(2\sigma-1)}}\right);$$

ferner ist nach (91), (94) für $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \mid 2$, $\mathfrak{l}^n \mid \nu$ [34])

$$J(\mathfrak{l}) = 1 + (-1)^\sigma \left(\sum_{a=2}^{n} 2^{-(a-1)(2\sigma-1)} - 2^{-n(2\sigma-1)}\right) \quad \text{für} \quad n > 0,^{35)}$$
$$= 1 \quad \text{für} \quad n = 0.$$

Daher ist

$$\mathfrak{S} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid 2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}}\right) \prod_{\mathfrak{p}^n \mid \nu}\left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma-1}} + \dots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{n(2\sigma-1)}}\right) \prod_{\mathfrak{l}^n \mid \nu}\left(1 + \frac{(-1)^\sigma}{N\mathfrak{l}^{2\sigma-1}} + \dots + \frac{(-1)^\sigma}{N\mathfrak{l}^{(n-1)(2\sigma-1)}} - \frac{(-1)^\sigma}{N\mathfrak{l}^{n(2\sigma-1)}}\right).$$

Wegen

$$\prod_{\mathfrak{p} \nmid 2}\left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2\sigma}}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2\sigma}}\right)^2 \zeta_K(2\sigma)}$$

folgt also

$$N\nu^{2\sigma-1}\mathfrak{S} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2\sigma}}\right)^2 \zeta_K(2\sigma)} \sum_{\mathfrak{t} \mid \nu} \pm N\mathfrak{t}^{2\sigma-1}, \tag{96}$$

wo $\mathfrak{t}$ alle Idealteiler von ν durchläuft und sich das Vorzeichen von $N\mathfrak{t}$ aus der folgenden Tabelle bestimmt: Es sei $\mathfrak{l}^a = \mathfrak{L}_1 \mid \nu$, $\mathfrak{l}'^{a'} = \mathfrak{L}_2 \mid \nu$, $(\nu) = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2\mathfrak{n}$;[36]) dann ist für[37])

---

[33]) In den Fällen $s \not\equiv 0 \pmod 4$ tritt eine Zetafunktion mit Charakteren auf.

[34]) Vgl. die analoge Rechnung in der bei [2]) an dritter Stelle zitierten Arbeit von Hardy.

[35]) Für $n = 1$ ist $\sum_{a=2}^{n} = 0$.

[36]) In den Fällen $\mathfrak{l} \nmid \nu$ oder $\mathfrak{l}' \nmid \nu$ sind $\mathfrak{L}_1$ oder $\mathfrak{L}_2$ durch 1 zu ersetzen.

[37]) Ist $\mathfrak{l} \nmid$ · oder $\mathfrak{l}' \nmid \nu$, so sind die Fälle 6. oder 7. auszuschließen.

1. $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $+$;
2. $\mathfrak{L}_1 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{L}_2 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $+$;
3. $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $+$;
4. $\mathfrak{L}_1 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{L}_2 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma}$;
5. $\mathfrak{L}_2 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{L}_1 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \mid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma}$;
6. $\mathfrak{L}_1 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma+1}$;
7. $\mathfrak{L}_2 \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $(-)^{\sigma+1}$;
8. $\mathfrak{L}_1 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $-$;
9. $\mathfrak{L}_2 \nmid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l}' \mid \mathfrak{t}$, $\mathfrak{l} \nmid \mathfrak{t}$, Vorzeichen $-$.

Ist insbesondere $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2 = 1$, also ν zu 2 teilerfremd, so ist das Vorzeichen stets positiv; in (96) steht dann rechts die Summe der $2\sigma-1$-ten Potenzen der Normen aller Idealteiler von ν.

Es bleibt noch $\zeta_K(2\sigma)$ zu bestimmen[38]). Nun ist

$$\zeta_K(2\sigma) = \zeta(2\sigma)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{n}\right)\frac{1}{n^{2\sigma}}, \tag{97}$$

$$\zeta(2\sigma) = (-1)^{\sigma-1}\frac{h^{2\sigma}(2\pi)^{2\sigma}}{2(2\sigma)!}, \tag{98}$$

wo $h^{2\sigma}$ die 2σ-te Bernoullische Zahl[39]) bedeutet. Ferner gilt für das Bernoullische Polynom $S_{2\sigma-1}(x)$ [40]) die Fouriersche Reihenentwicklung

$$\frac{(-1)^{\sigma-1}(2\pi)^{2\sigma}}{2(2\sigma-1)!}\left\{S_{2\sigma-1}(x) + \frac{h^{2\sigma}}{2\sigma}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n x}{n^{2\sigma}} \qquad (0 \leqq x \leqq 1); \text{[41])} \tag{99}$$

und es ist

$$\left(\frac{d}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{n'=1}^{d}\left(\frac{d}{n'}\right)\cos\frac{2\pi n n'\pi}{d}. \text{[42])} \tag{100}$$

---

[38]) Vgl. H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen 1, S. 134.

[39]) Die Bernoullischen Zahlen werden durch die symbolische Formel

$$h^0 = 1, \quad (h+1)^n = h^n \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

bestimmt.

[40]) Für natürliches x ist

$$S_k(x) = 0^k + 1^k + \ldots + (x-1)^k = \frac{(x+h)^{k+1} - h^{k+1}}{k+1} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

[41]) Vgl. z. B. De la Vallée Poussin, Cours d'analyse infinitésimale 2, 2. Aufl., Louvain-Paris (1912), S. 371.

[42]) Vgl. z. B. D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4 (1897), S. 320.

Ich benutze (99) für $x = \frac{n'}{d}$ $(n' = 1, \dots, d)$; dann folgt wegen (100)

$$(101) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) \frac{1}{n^{2\sigma}} = \sum_{n=1}^{d} \left(\frac{d}{n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+kd)^{2\sigma}}$$

$$= \sum_{n'=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{d}} \left(\frac{d}{n'}\right) \sum_{n=1}^{d} \cos \frac{2\pi n' \pi}{d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+kd)^{2\sigma}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{n'=1}^{d} \left(\frac{d}{n'}\right) \frac{(-1)^{\sigma-1}(2\pi)^{2\sigma}}{2(2\sigma-1)!} \left\{ S_{2\sigma-1}\left(\frac{n'}{d}\right) + \frac{h^{2\sigma}}{2\sigma} \right\}.$$

Es ergibt sich also schließlich aus (1), (96), (97), (98), (101) (für $d \equiv 1 \pmod 8$)

$$(102)\ A_{4\sigma}(\nu) \sim \frac{\pi^{4\sigma}\, 2(2\sigma)!\, 2(2\sigma-1)!\, \sqrt{d} \sum\limits_{\mathfrak{t}|\nu} \pm N\mathfrak{t}^{2\sigma-1}}{\{(2\sigma-1)!\}^2 d^{2\sigma-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2^{2\sigma}}\right)^2 h^{2\sigma} (2\pi)^{2\sigma} (2\pi)^{2\sigma} \sum\limits_{n'=1}^{d} \left(\frac{d}{n'}\right) S_{2\sigma-1}\left(\frac{n'}{d}\right)}$$

$$= \frac{4 \sum\limits_{\mathfrak{t}|\nu} \pm N\mathfrak{t}^{2\sigma-1}}{(2^{2\sigma}-1)^2 d^{2\sigma-1} \frac{h^{2\sigma}}{2\sigma} \sum\limits_{n=1}^{d} \left(\frac{d}{n}\right) S_{2\sigma-1}\left(\frac{n}{d}\right)},$$

wo in $\sum\limits_{\mathfrak{t}|\nu}$ das Zeichen $\pm$ die oben erklärte Bedeutung hat. In (102) steht rechts eine *rationale* Zahl.

Göttingen, 15. September 1921.

(Eingegangen am 15. 9. 1921.)

Neuer Beweis des Satzes von Minkowski über lineare Formen.

Von

Carl Ludwig Siegel in Göttingen.

Der Satz von Minkowski lautet:

Es seien

$$\xi_1 = a_{11} x_1 + \ldots + a_{1n} x_n$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi_n = a_{n1} x_1 + \ldots + a_{nn} x_n$$

n lineare Formen mit reellen Koeffizienten und der Determinante $D > 0$. Sind dann $\tau_1, \ldots, \tau_n$ irgend n positive Zahlen vom Produkte D, so haben die n simultanen Ungleichungen

$$|\xi_1| \leqq \tau_1, \ldots, |\xi_n| \leqq \tau_n$$

eine Lösung in ganzen rationalen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, die nicht sämtlich 0 sind.

Für diesen Satz sind verschiedene einfache Beweise bekannt, trotzdem ist der folgende, da er mit den Mitteln der analytischen Zahlentheorie operiert, vielleicht nicht ohne Interesse[1]).

Die zu (a_{kl}) $(k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, n)$ reziproke Matrix sei (A_{lk}). Sind $s_1, \ldots, s_n$ n komplexe Veränderliche mit positiv reellen Teilen und durchlaufen $l_1, \ldots, l_n$ unabhängig voneinander alle ganzen rationalen Zahlen, so gilt die Identität

$$(1) \qquad D \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} |a_{k1} l_1 + \ldots + a_{kn} l_n| s_k}$$

$$= \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{s_k - 2\pi i (A_{k1} l_1 + \ldots + A_{kn} l_n)} + \frac{1}{s_k + 2\pi i (A_{k1} l_1 + \ldots + A_{kn} l_n)} \right\}.$$

---

[1]) Für den Gedankengang des Beweises vgl. auch meine Arbeit: *Über die Diskriminanten total reeller Körper*, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1922, S. 17–24.

Zum Beweise ersetze man im Exponenten der linken Seite von (1) die Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ durch $l_1 + x_1, \ldots, l_n + x_n$, wo $x_1, \ldots, x_n$ reelle Unbestimmte bedeuten, und beachte, daß die so entstehende n-fach periodische Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ in eine absolut konvergente Fouriersche Reihe

$$\sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{+\infty} c_{l_1 \ldots l_n} e^{2\pi i (l_1 x_1 + \ldots + l_n x_n)}$$

entwickelt werden kann. Das n-fache bestimmte Integral, welches den Koeffizienten $c_{l_1 \ldots l_n}$ liefert, wird dann, wie eine ganz leichte Rechnung ergibt[2]), genau gleich dem allgemeinen Glied der auf der rechten Seite von (1) stehenden Reihe. Setzt man dann $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, so folgt (1).

Nunmehr seien $t_1, \ldots, t_n$ n positive Zahlen. Ich multipliziere (1) mit

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{s_k t_k}}{s_k^2} \right)$$

und integriere über jedes s_k auf geradem Wege von $1 - \infty i$ bis $1 + \infty i$. Man darf, wie aus elementaren Regeln leicht ersichtlich wird, die Integration beiderseits gliedweise ausführen und erhält somit

$$(2) \qquad D \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{s_k (t_k - |a_{k1} l_1 + \ldots + a_{kn} l_n|)}}{s_k^2} d s_k \right)$$

$$= \sum_{l_1, \ldots, l_n = -\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{s_k t_k}}{s_k^2} \left(\frac{1}{s_k - 2\pi i (A_{k1} l_1 + \ldots + A_{kn} l_n)} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{s_k + 2\pi i (A_{k1} l_1 + \ldots + A_{kn} l_n)} \right) d s_k \right\}.$$

Nach dem Integralsatz von Cauchy ist nun

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^{as}}{s^2} ds = \begin{cases} a & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a \leqq 0, \end{cases}$$

und für reelles b

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} \frac{e^s}{s^2} \left(\frac{1}{s - 2\pi i b} + \frac{1}{s + 2\pi i b} \right) ds = \left(\frac{\sin \pi b}{\pi b} \right)^2,$$

wo im Falle $b = 0$ unter $\frac{\sin \pi b}{\pi b}$ die Zahl 1 zu verstehen ist. Wegen (3) und (4) geht (2) über in

[2]) Die Einzelheiten der Rechnung sind aus meiner unter [1]) zitierten Arbeit ersichtlich.

$$(5)\qquad D\sum{}'\prod_{k=1}^{n}(t_k-|a_{k1}l_1+\cdots+a_{kn}l_n|)$$
$$=\sum_{l_1,\ldots,l_n=-\infty}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\{\pi(A_{k1}l_1+\cdots+A_{kn}l_n)t_k\}}{\pi(A_{k1}l_1+\cdots+A_{kn}l_n)}\right)^2;\ {}^{3})$$

hierin durchlaufen auf der linken Seite $l_1,\ldots,l_n$ alle diejenigen ganzen rationalen Zahlen, für welche die n linearen Formen $a_{k1}l_1+\cdots+a_{kn}l_n$ $(k=1,\ldots,n)$ absolut $<t_k$ sind. Ich denke mir $t_1,\ldots,t_n$ so klein gewählt, daß die letztere Bedingung nur für $l_1=0,\ldots,l_n=0$ erfüllt ist; dann hat in (5) die linke Seite den Wert $D\prod_{k=1}^{n}t_k$. Die rechte Seite ist als Summe von Quadraten nicht kleiner als das Glied $\prod_{k=1}^{n}t_k^2$, welches durch $l_1=0,\ldots,l_n=0$ geliefert wird. Folglich ist

$$D\prod_{k=1}^{n}t_k\geq\prod_{k=1}^{n}t_k^2,\qquad \prod_{k=1}^{n}t_k\leq D.$$

Ist also $\prod_{k=1}^{n}t_k>D$, so gibt es n ganze rationale Zahlen $l_1,\ldots,l_n$, die nicht sämtlich 0 sind, so daß $|a_{k1}l_1+\cdots+a_{kn}l_n|<t_k$ $(k=1,\ldots,n)$ ist. Setzt man nun $t_1=\tau_1,\ldots,t_{k-1}=\tau_{k-1}$, $t_k=\tau_k+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$, so folgt durch den Grenzübergang $\varepsilon\to0$ der Satz von Minkowski[4]).

Göttingen, 30. November 1921.

---

[3]) $\frac{\sin\{\pi(A_{k1}l_1+\cdots+A_{kn}l_n)t_k\}}{\pi(A_{k1}l_1+\cdots+A_{kn}l_n)}=1$ für verschwindenden Nenner.

[4]) Es ist damit sogar die Lösbarkeit von

$$|\xi_1|<\tau_1,\ldots,|\xi_{n-1}|<\tau_{n-1},\ |\xi_n|\leq\tau_n\qquad(n\geq2)$$

bewiesen. Auch die tieferliegende Behauptung von Minkowski über die Lösbarkeit von

$$|\xi_1|<\tau_1,\ldots,|\xi_n|<\tau_n,$$

die zuerst von B. Levi [Un teorema del Minkowski sui sistemi di forme lineari a variabili intere, Rendiconti del circolo matematico di Palermo 31 (1911), S. 318–340] bewiesen wurde, läßt sich aus (5) ohne Mühe ableiten.

(Eingegangen am 30. 11. 1921.)

Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem.

Von

J. G. van der Corput in Freiburg (Schweiz).

Es bezeichne $T(n)$ die Anzahl der Teiler der positiven ganzen Zahl n, $\tau(x)$ die summatorische Funktion

$$\tau(x) = \sum_{n \leqq x} T(n) = \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right] \qquad (x \geqq 0),$$

C die Eulersche Konstante, $R(x)$ die Funktion

$$R(x) = \tau(x) - x \log x - (2C - 1)x \qquad (x > 0).$$

Über Dirichlets Ergebnis

$$R(x) = O(\sqrt{x})$$

war erst Voronoï[1]) 1903 hinausgekommen, indem er

$$R(x) = O(\sqrt[3]{x} \log x)$$

bewies. Bis jetzt hat man $|R(x)|$ nicht schärfer nach oben abschätzen können, so daß die Abschätzung

$$R(x) = O(x^M) \qquad \left(M < \frac{33}{100}, \text{ unabhängig von } x\right),$$

welche ich in dieser Note beweisen werde, neu ist.

Aus der (mit elementarsten Mitteln beweisbaren) Relation[2])

$$R(x) = -2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right) + O(1)$$

---

[1]) G. Voronoï, *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* [Journal für die reine und angewandte Mathematik 126 (1903), S. 241—282].

[2]) Vgl. z. B. E. Landau, *Über Dirichlets Teilerproblem* [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1920, S. 13—32] S. 15–16.

ergibt sich, daß es genügt, die Beziehung

$$(1) \qquad \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right) = O(x^M)$$

abzuleiten. Der Beweis dieser Beziehung stützt sich auf zwei allgemeine Sätze (Satz 1 und Satz 2); den ersten Satz beweise ich mittels einer eigenen Methode[3]), den zweiten mittels der Weylschen Abschätzungsmethode[4]). Um den Beweis zu verstehen, braucht der Leser diese Methoden nicht zu kennen.

Bezeichnung: $x \prec y$ bezeichne, daß es eine Konstante K gibt mit der Eigenschaft

$$(2) \qquad |x| \leq K\,|y|;$$

$x \succ y$ bezeichne $y \prec x$ und $x \succ\prec y$ bezeichne, daß $x \succ y$ und auch $x \prec y$ ist. Wir werden sagen, daß $x \prec y$ in bezug auf s ist, wenn es eine nur von s abhängige Zahl K mit der Eigenschaft (2) gibt; daß $x \prec y$ in bezug auf s und t ist, wenn es eine nur von s und t abhängige Zahl K gibt, für die (2) gilt.

Hilfssatz 1: *Falls* $w > 1$, $a < b$, $A < B$, $f(n)$ *im Intervall* $a \leq n \leq b$ *definiert, reell und differentiierbar*[5]), $f'(n)$ *monoton*[6]) *und* $A + \frac{1}{w} < f'(n) < B - \frac{1}{w}$ *ist, dann ist*

$$(3) \qquad \sum_{a \leq n \leq b} e^{2\pi i f(n)} - \sum_{A \leq \nu \leq B} \int_a^b e^{2\pi i (f(n) - \nu n)}\, dn \prec w + \log(2 + B - A).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f'(n)$ monoton nicht-abnehmend voraussetzen, da sonst $f(n)$ durch $-f(n)$ ersetzt werden kann.

(3) ändert sich nicht, falls $f(n)$ durch $f(n) + gn$ (g ganz) ersetzt wird; denn A, B, ν werden dann bzw. durch $A + g$, $B + g$, $\nu + g$ ersetzt, während $f(n) - \nu n$ denselben Wert behält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also $0 \leq A < 1$ voraussetzen. Dann ist

$$(4) \qquad \frac{1}{w} < f'(a) \leq f'(b) < B - \frac{1}{w}.$$

---

[3]) J. G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen* [Mathematische Annalen, 84 (1921), S. 53–79].

[4]) H. Weyl, Acta Mathematica 37, S. 155–191 und S. 193–239; Mathematische Annalen 77 (1916), S. 313–352 und Mathematische Zeitschrift 10 (1921), S. 88–101.

[5]) In den Endpunkten eventuell nur einseitig.

[6]) D. h. für zwei beliebige Punkte n und n' des abgeschlossenen Intervalles (a, b) ist $(n' - n)\,(f(n') - f(n))$ entweder stets ≥ 0, oder stets ≤ 0.

Falls für m ganz $> B$

$$\chi_m(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{\nu=-m \\ \nu \neq 0}}^{m} \frac{e^{-2\nu\pi u i}}{\nu}$$

gesetzt wird, ist

$$2\pi i \int_a^b \chi_m(u) e^{2\pi i f(u)} f'(u)\, du = \sum_{\substack{\nu=-m \\ \nu \neq 0}}^{m} \frac{1}{\nu} \int_a^b e^{2\pi i (f(u) - \nu u)} f'(u)\, du$$

$$= \sum_{0<\nu\leqq B} + \sum_{B<\nu\leqq m} - \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu} \int_a^b e^{2\pi i (f(u)+\nu u)} f'(u)\, du$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &= \sum_{0<\nu\leqq B} \int_a^b e^{2\pi i (f(u)-\nu u)}\, du \\ &+ \sum_{0<\nu\leqq B} \frac{1}{2\pi i \nu} \int_a^b d e^{2\pi i (f(u)-\nu u)} \\ &+ \sum_{B<\nu\leqq m} \frac{1}{2\pi i \nu} \int_a^b \frac{f'(u)}{f'(u)-\nu}\, d e^{2\pi i (f(u)-\nu u)} \\ &- \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i \nu} \int_a^b \frac{f'(u)}{f'(u)+\nu}\, d e^{2\pi i (f(u)+\nu u)}. \end{aligned} \right.$$

Die zweite Summe in (5) ist

$$\frac{e^{2\pi i f(b)}}{2\pi i} \sum_{0<\nu\leqq B} \frac{e^{-2\pi i \nu b}}{\nu} - \frac{e^{2\pi i f(a)}}{2\pi i} \sum_{0<\nu\leqq B} \frac{e^{-2\pi i \nu a}}{\nu} \prec \log(2+B);$$

wegen der Monotonie von $f'(u)$ und wegen (4) ist die dritte Summe in (5)

$$\prec \sum_{B<\nu} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{f'(b)}{\nu - f'(b)} < w + \int_{f'(b)+1}^{\infty} \frac{f'(b)}{\nu(\nu - f'(b))}\, d\nu$$

$$= w + \log(1 + f'(b)) < w + \log(2+B),$$

und schließlich die letzte Summe in (5) ist

$$\prec \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f'(b)}{\nu(f'(b)+\nu)} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{f'(b)}{\nu(f'(b)+\nu)}\, d\nu$$

$$= 1 + \log(1 + f'(b)) < w + \log(2+B).$$

Wenn man diese Ergebnisse in (5) einsetzt, findet man

$$2\pi i\int_a^b \chi_m(u)\, e^{2\pi i f(u)} f'(u)\, du - \sum_{0<\nu\leq B}\int_a^b e^{2\pi i (f(u)-\nu u)}\, du \prec w + \log(2+B).$$

Da bekanntlich $\chi_m(u)$ beschränkt ist, und, falls u nicht ganz ist, der Beziehung

$$\lim_{m=\infty} \chi_m(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$$

genügt, folgt hieraus

$$2\pi i\int_a^b \left(u - [u] - \frac{1}{2}\right) e^{2\pi i f(u)} f'(u)\, du - \sum_{0<\nu\leq B}\int_a^b e^{2\pi i (f(u)-\nu u)}\, du$$
$$\prec w + \log(2+B).$$

Nach der Eulerschen Summenformel ist

$$\sum_{a\leq n\leq b} e^{2\pi i f(n)} = \int_a^b e^{2\pi i f(u)}\, du - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) e^{2\pi i f(b)}$$
$$+ \left(a + [-a] + \frac{1}{2}\right) e^{2\pi i f(a)} + 2\pi i \int_a^b \left(u - [u] - \frac{1}{2}\right) e^{2\pi i f(u)} f'(u)\, du,$$

also

$$\sum_{a\leq n\leq b} e^{2\pi i f(n)} - \int_a^b e^{2\pi i f(u)}\, du - \sum_{0<\nu\leq B}\int_a^b e^{2\pi i (f(u)-\nu u)}\, du \prec w + \log(2+B).$$

Hiermit ist (3) im Falle $A=0$ bewiesen. Falls $0<A<1$ ist, wenden wir den zweiten Mittelwertsatz an, und finden dann wegen (4)

$$\int_a^b e^{2\pi i f(u)}\, du = \int_a^b \frac{d e^{2\pi i f(u)}}{2\pi i f'(u)} \prec w,$$

so daß die linke Seite von (3) dann

$$\prec w + \log(2+B) \prec w + \log(2+B-A)$$

ist. Hiermit ist Hilfssatz 1 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei $a<b$, $f(u)$ im Intervall $a\leq u\leq b$ definiert, reell und zweimal differentiierbar*[5]), *$f''(u)$ beständig $\geq \omega$ oder beständig $\leq -\omega$, wo ω eine von u unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist*

$$\int_a^b e^{2\pi i f(u)}\, du \prec \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Beweis. Ist die Weglänge $b - a \leqq \frac{1}{\sqrt{\omega}}$, so ist die Behauptung trivial, da das Integral dann absolut $\leqq \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ ist.

Andernfalls schneiden wir von dem Ende, wo $|f'(u)|$ am kleinsten ist, ein Stück der Länge $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ ab; dessen Beitrag zum Integral ist absolut $\leqq \frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Auf der verbleibenden Strecke ist $f'(u)$ beständig zu- oder abnehmend, von festem Vorzeichen und absolut größer als $\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\omega}$. Nach dem zweiten Mittelwertsatz ist für diese Strecke

$$\int e^{2\pi i f(u)}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d e^{2\pi i f(u)}}{f'(u)} \prec \frac{1}{\sqrt{\omega}},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz 1. *Es sei $a < b$, $f(n)$ im Intervall $a \leqq n \leqq b$ definiert, reell und dreimal differentiierbar*[5]), *$f''(n)$ stets positiv oder stets negativ, $\alpha = \operatorname{Min}(f'(a), f'(b))$, $\beta = \operatorname{Max}(f'(a), f'(b))$, so daß zu jedem ν im Intervall $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$ die Zahl n_ν eindeutig bestimmt ist durch die Beziehungen $f'(n_\nu) = \nu$, $a \leqq n_\nu \leqq b$. Es sei im Intervall $a \leqq n \leqq b$*

$$\delta f_2 \leqq |f''(n)| \leqq f_2, \qquad |f'''(n)| \leqq f_3, \tag{6}$$

wo f_2, f_3 und δ $(\delta > 0)$ von n unabhängig sind. Dann ist

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - e^{\pm\frac{\pi i}{4}} \sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} \frac{e^{2\pi i (f(n_\nu) - \nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}$$
$$\prec \frac{1}{\sqrt{f_2}} + \log(2 + (b-a) f_2) + (b-a)\sqrt[5]{f_2 f_3}$$

in bezug auf δ, wo das $+$- oder $-$-Zeichen benutzt wird, je nachdem $f''(n)$ stets positiv oder stets negativ ist.

Beweis. Im Beweis dieses Satzes werden wir alle Beziehungen mit dem Zeichen $\prec$ in bezug auf δ nehmen. Nach (6) ist im Intervall $a \leqq n \leqq b$

$$\frac{1}{f''(n)} \prec \frac{1}{f_2}.$$

Bekanntlich ist, falls ϱ eine Zahl $\neq 0$ bezeichnet,

$$\int_0^\infty e^{\pi i u^2 \varrho}\,du = \frac{1}{2\sqrt{|\varrho|}} \int_0^\infty e^{\pm \pi i v} \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{e^{\pm\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{|\varrho|}}, \tag{7}$$

wo das $+$-oder $-$-Zeichen angewandt wird, je nachdem ϱ positiv oder negativ ist; falls r eine positive Zahl darstellt, ist

$$(8) \qquad \int_r^\infty e^{\pi i u^2 \varrho}\, du = \frac{1}{2\pi i \varrho} \int_r^\infty \frac{d e^{\pi i u^2 \varrho}}{u} < \frac{1}{r\varrho}.$$

Aus (7) und (8) folgt im Falle $r' < 0 < r$

$$\int_{r'}^{r} e^{\pi i u^2 \varrho}\, du - \frac{e^{\pm\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|\varrho|}} = -\int_r^\infty e^{\pi i u^2 \varrho}\, du - \int_{|r'|}^\infty e^{\pi i u^2 \varrho}\, du < \frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{|r'|}\right),$$

also im Falle $a < n_\nu < b$

$$(9) \quad \int_{a-n_\nu}^{b-n_\nu} e^{\pi i u^2 f''(n_\nu)}\, du - \frac{e^{\pm\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}} < \frac{1}{f''(n_\nu)}\left(\frac{1}{b-n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - a}\right) < \frac{1}{f_2}\left(\frac{1}{b-n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - a}\right).$$

Jetzt werden wir die Ungleichung

$$(10) \qquad \sum_{\alpha+2 \leqq \nu \leqq \beta-2}' \left(\frac{1}{b-n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - a}\right) < f_2 \log\left(2 + (b-a) f_2\right)$$

beweisen. Falls die Summe links nicht leer ist, ist die Summe kleiner als

$$\int_{\alpha+1}^{\beta-1} \left(\frac{1}{b-n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - a}\right) d\nu.$$

Da $f'(n)$ stetig ist, und beim Beweis von (10) $|f'(b) - f'(a)| > 1$ vorausgesetzt wird, gibt es zwei Zahlen a_0 und b_0 mit der Eigenschaft

$$a < \begin{matrix} a_0 \\ b_0 \end{matrix} < b, \quad f'(a_0) = f'(a) \pm 1, \quad f'(b_0) = f'(b) \mp 1,$$

wo das obere, bzw. das untere Zeichen benutzt wird, je nachdem $f'(a)$ kleiner oder größer als $f'(b)$ ist; dann ist nach (6)

$$1 = |f'(a_0) - f'(a)| \leqq (a_0 - a) f_2, \quad 1 = |f'(b) - f'(b_0)| \leqq (b - b_0) f_2,$$

also

$$\frac{1}{a_0 - a} \leqq f_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{b - b_0} \leqq f_2.$$

Wegen $f'(n_\nu) = \nu$ ist

$$\left|\frac{d\nu}{d n_\nu}\right| = |f''(n_\nu)| \leqq f_2,$$

also

$$\int_{\alpha+1}^{\beta-1} \left(\frac{1}{b-n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - a}\right) d\nu \leqq f_2 \int_a^{b_0} \frac{dn}{b-n} + f_2 \int_{a_0}^{b} \frac{dn}{n-a}$$

$$= f_2 \log \frac{b-a}{b-b_0} + f_2 \log \frac{b-a}{a_0 - a} < 2 f_2 \log\left(2 + (b-a) f_2\right).$$

Hiermit ist (10) bewiesen.

Aus (9) und (10) ergibt sich

$$(11)\qquad \sum_{\alpha+2\leqq\nu\leqq\beta-2} e^{2\pi i(f(n_\nu)-\nu n_\nu)}\left\{\int_{a-n_\nu}^{b-n_\nu} e^{\pi i u^2 f''(n_\nu)}\,du-\frac{e^{\pm\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}\right\}<\log(2+(b-a)f_2)$$

Nach Hilfssatz 1 mit $w=3$, $A=\alpha-\frac{1}{2}$, $B=\beta+\frac{1}{2}$, ist

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi i f(n)}-\sum_{\alpha-\frac{1}{2}\leqq\nu\leqq\beta+\frac{1}{2}}\int_a^b e^{2\pi i(f(n)-\nu n)}\,dn\\ &<3+\log(3+\beta-\alpha)<\log(2+(b-a)f_2),\end{aligned}\right.$$

und hieraus folgt

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi i f(n)}-\sum_{\alpha+2\leqq\nu\leqq\beta-2}\int_a^b e^{2\pi i(f(n)-\nu n)}\,dn\\ &-e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\sum_{\alpha\leqq\nu<\alpha+2}\frac{e^{2\pi i(f(n_\nu)-\nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}-e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\sum_{\beta-2<\nu\leqq\beta}\frac{e^{2\pi i(f(n_\nu)-\nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}\\ &\qquad<\frac{1}{\sqrt{f_2}}+\log(2+(b-a)f_2);\end{aligned}\right.$$

denn nach Hilfssatz 2 mit $f(n)-\nu n$ statt $f(n)$ und mit $\omega=\delta f_2$ ist

$$\int_a^b e^{2\pi i(f(n)-\nu n)}\,dn<\frac{1}{\sqrt{f_2}},$$

so daß die linke Seite von (13) gleich der linken Seite von (12) ist, vermehrt um eine beschränkte Anzahl von Gliedern $<\frac{1}{\sqrt{f_2}}$.

Es genügt zu beweisen

$$(14)\qquad \sum_{\alpha+2\leqq\nu\leqq\beta-2}\int_{a-n_\nu}^{b-n_\nu}\{e^{2\pi i(f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))}-e^{2\pi i(f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))}\}\,du<(b-a)\sqrt[5]{f_2 f_3};$$

denn die Behauptung folgt aus (13), (14) und (11). Um (14) zu beweisen, genügt es, die Beziehung

$$(15)\qquad \int_{a-n_\nu}^{b-n_\nu}\{e^{2\pi i(f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))}-e^{2\pi i(f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))}\}\,du<\sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}$$

abzuleiten; denn aus (15) folgt, daß die linke Seite von (14)

$$<\sum_{\alpha+2\leqq\nu\leqq\beta-2}\sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}<(\beta-\alpha)\sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}\leqq(b-a)f_2\cdot\sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}=(b-a)\sqrt[5]{f_2 f_3}$$

ist.

Ungleichung (15) ist trivial, falls $f_3^4 \geqq \delta^5 f_2^6$ ist; denn dann ist nach Hilfssatz 2 mit $f(n_\nu + u) - \nu(n_\nu + u)$ statt $f(u)$ und mit $\omega = \delta f_2$

$$\int\limits_{a-n_\nu}^{b-n_\nu} e^{2\pi i (f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))}\, du \prec \frac{1}{\sqrt{f_2}} \prec \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}},$$

nach Hilfssatz 2 mit $f(n_\nu) - \nu n_\nu + \frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu)$ statt $f(u)$ und $\omega = |f''(n_\nu)|$

$$\int\limits_{a-n_\nu}^{b-n_\nu} e^{2\pi i (f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))}\, du \prec \frac{1}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}} \prec \frac{1}{\sqrt{f_2}} \prec \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}.$$

Beziehung (15) ist auch im Falle $f_3 = 0$ evident; denn dann ist $f'''(n)$ stets Null, also wegen $\nu = f'(n_\nu)$

$$f(n_\nu + u) - \nu u = f(n_\nu) + \frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu),$$

so daß die linke Seite von (15) verschwindet. Wir dürfen also $0 < f_3^4 < \delta^5 f_2^6$ voraussetzen.

Es werde $l = \frac{1}{\sqrt[5]{f_2 f_3}}$ gesetzt. Für eine Zahl n_ν mit der Eigenschaft $a \leqq \genfrac{}{}{0pt}{}{n_\nu}{n_\nu + l} \leqq b$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
|f'(n_\nu + l) - \nu - l f''(n_\nu)| &= |f'(n_\nu + l) - f'(n_\nu) - l f''(n_\nu)| \\
&= \frac{1}{2} l^2 |f'''(n_\nu + \theta l)| \qquad \text{mit } 0 < \theta < 1 \\
&\leqq \frac{1}{2} l \sqrt[5]{\frac{f_3^4}{f_2}} < \frac{1}{2}\delta l f_2 \leqq \frac{1}{2} l |f''(n_\nu)|,
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$(16) \qquad |f'(n_\nu + l) - \nu| \geqq \frac{1}{2} l |f''(n_\nu)| \succ \sqrt[5]{\frac{f_2^4}{f_3}}.$$

Für $0 \leqq u \leqq l$ und $a \leqq \genfrac{}{}{0pt}{}{n_\nu}{n_\nu + u} \leqq b$ ist

$$\begin{aligned}
& e^{2\pi i (f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))} - e^{2\pi i (f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))} \\
&\prec e^{2\pi i (f(n_\nu+u)-f(n_\nu)-\nu u-\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))} - 1 \\
&\prec f(n_\nu + u) - f(n_\nu) - \nu u - \frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu) \\
&= f(n_\nu) + u\nu + \frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu + \theta_1 u) - f(n_\nu) - \nu u - \frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu) \qquad \text{mit } 0 < \theta_1 < 1 \\
&= \frac{\theta_1}{2} u^3 f'''(n_\nu + \theta_2 u) \prec l^3 f_3 \qquad \text{mit } 0 < \theta_2 < 1.
\end{aligned}$$

Falls $b - n_\nu \leqq l$ ist, ist also

$$\int\limits_0^{b-n_\nu} \{e^{2\pi i (f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))} - e^{2\pi i (f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))}\}\, du \prec l^4 f_3 \prec \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}.$$

Falls $b - n_\nu > l$ ist, ist

$$(17)\quad \int_0^l \{e^{2\pi i\,(f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))} - e^{2\pi i\,(f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))}\}\,du < l^4 f_3 < \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}.$$

Im Intervall $l \leqq u \leqq b - n_\nu$ ist $|f'(n_\nu + u) - \nu|$ eine monoton nichtabnehmende Funktion von u, welche nach (16) $> \sqrt[5]{\frac{f_2^4}{f_3}}$ ist, also

$$(18)\quad \int_l^{b-n_\nu} e^{2\pi i\,(f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_l^{b-n_\nu} \frac{d e^{2\pi i\,(f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))}}{f'(n_\nu+u)-\nu} < \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}.$$

Weiterhin ist

$$(19)\quad \int_l^{b-n_\nu} e^{\pi i u^2 f''(n_\nu)}\,du = \int_l^{b-n_\nu} \frac{d e^{\pi i u^2 f''(n_\nu)}}{2\pi i u f''(n_\nu)} < \frac{1}{l f''(n_\nu)} < \frac{1}{l f_2} < \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}.$$

Aus (17), (18) und (19) ergibt sich

$$\int_0^{b-n_\nu} \{e^{2\pi i\,(f(n_\nu+u)-\nu(n_\nu+u))} - e^{2\pi i\,(f(n_\nu)-\nu n_\nu+\frac{1}{2}u^2 f''(n_\nu))}\}\,du < \sqrt[5]{\frac{f_3}{f_2^4}}.$$

Auf dieselbe Art beweist man die entsprechende Beziehung mit den Grenzen $n_\nu - a$ und 0, statt 0 und $b - n_\nu$. Hiermit ist (15), also Satz 1, vollständig bewiesen.

Satz 2. *Es sei $a < b$, $b - a \geqq 1$, $f(n)$ im Intervall $a \leqq n \leqq b$ definiert und reell. Es sei q ganz > 0; es werde $Q = 2^q$ gesetzt. Es sei $g = (g_1, g_2, \ldots, g_q)$ ein Gitterpunkt im q-dimensionalen Raum; es sei α_g die kleinste ganze Zahl*

$$\geqq a - \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 + \cdots + g_q) + \tfrac{1}{2}(|g_1| + |g_2| + \cdots + |g_q|),$$

und es sei β_g die größte ganze Zahl

$$\leqq b - \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2 + \cdots + g_q) - \tfrac{1}{2}(|g_1| + |g_2| + \cdots + |g_q|).$$

Falls $\alpha_g < \beta_g$ ist, werde im Intervall $\alpha_g \leqq \nu \leqq \beta_g$ gesetzt

$$(20)\quad \begin{cases} \Delta_g(\nu) = f(N + g_1 + \cdots + g_q) - \sum f(N + g_1 + \cdots + g_{q-1}) \\ \qquad + \sum f(N + g_1 + \cdots + g_{q-2}) - \cdots + (-1)^{q-1} \sum f(N + g_1) \\ \qquad + (-1)^q f(N); \end{cases}$$

die letzte Seite ist die algebraische Summe von

$$1 + q + \frac{1}{2}q(q-1) + \ldots + q + 1 = 2^q$$

Gliedern, und jedes dieser Glieder ist im Intervall $\alpha_g \leqq \nu \leqq \beta_g$ *definiert.*

Es sei $H > 0$ *und für* $|g| = |g_1| + \ldots + |g_q| \leqq H - 1$ *und* $G = g_1, g_2, \ldots, g_q \neq 0$ *sei die positive Zahl* U_g *so gewählt, daß für jedes* α *und jedes* β *mit der Eigenschaft* $\alpha_g \leqq \alpha < \beta \leqq \beta_g$ *die Beziehung*

$$\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} e^{2\pi i A_g(\nu)} \prec U_g \tag{21}$$

gilt.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} \prec H + \frac{b-a}{\sqrt[Q]{H}} + \sqrt[Q]{\frac{(b-a)^{Q-1}}{H^q} \sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} U_g}. \tag{22}$$

Beweis. Es werde $1 \leqq H < \frac{1}{4}(b-a)$ vorausgesetzt, da die Behauptung sonst trivial ist; wegen $H \geqq 1$ ändert (22) sich nicht, falls H durch die größte ganze Zahl $\leqq H$ ersetzt wird, so daß wir H ganz voraussetzen dürfen. Dann ist wegen $\beta_g > b - H$ und $\alpha_g < a + H$

$$\beta_g - \alpha_g > 2H, \tag{23}$$

und dann gibt es mindestens eine ganze Zahl $\geqq a$ und $\leqq b - H + 1$. Falls

$$S_h = \sum_{n=h}^{h+H-1} e^{2\pi i f(n)} \quad (a \leqq h \leqq b - H + 1;\ h \text{ ganz})$$

gesetzt wird, ist

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} - \frac{1}{H} \sum_{a \leqq h \leqq b-H+1} S_h \prec H.$$

Es genügt also zu beweisen

$$\sum_{a \leqq h \leqq b-H+1} S_h \prec (b-a)\sqrt[Q]{H^{Q-1}} + \sqrt[Q]{(b-a)^{Q-1} H^{Q-q} \sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} U_g},$$

so daß wir nur die Ungleichung

$$\Big| \sum_{a \leqq h \leqq b-H+1} S_h \Big|^Q \prec q\,(b-a)^Q (2H)^{Q-1} + (b-a)^{Q-1} (2H)^{Q-q} \sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} U_g$$

abzuleiten brauchen. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\Big| \sum_{a \leqq h \leqq b-H+1} S_h \Big|^Q \leqq (b-a)^{Q-1} \sum_{a \leqq h \leqq b-H+1} |S_h|^Q,$$

so daß es genügt zu zeigen

$$(24)\qquad \sum_{a \leqq h \leqq b-H+1} |S_h|^Q < q(b-a)(2H)^{Q-1} + (2H)^{Q-q} \sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} U_g.$$

Es ist

$$|S_h|^2 = \sum_{p=h}^{h+H-1} \sum_{n=h}^{h+H-1} e^{2\pi i (f(p)-f(n))} = \sum_{|g_1| \leqq H-1} \sum_n^{(1)} e^{2\pi i (f(n+g_1)-f(n))},$$

wenn die Summe $\sum\limits_n^{(1)}$ erstreckt wird über alle ganzzahligen n mit der Eigenschaft $h \leqq n \leqq h+H-1$, $h \leqq n+g_1 \leqq h+H-1$; n durchläuft also $H-|g_1|$ konsekutive ganze Zahlen. Falls $f(n+g_1)-f(n) = f_1(n)$ gesetzt wird, ist also

$$|S_h|^2 = \sum_{|g_1| \leqq H-1} \sum_n^{(1)} e^{2\pi i f_1(n)}.$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung folgt hieraus

$$|S_h|^4 \leqq (2H-1) \sum_{|g_1| \leqq H-1} \Big| \sum_n^{(1)} e^{2\pi i f_1(n)} \Big|^2$$

und hierin ist

$$\Big| \sum_n^{(1)} e^{2\pi i f_1(n)} \Big|^2 = \sum_p^{(1)} \sum_n^{(1)} e^{2\pi i (f_1(p)-f_1(n))} = \sum_{|g_2| \leqq H-1-|g_1|} \sum_n^{(2)} e^{2\pi i (f_1(n+g_2)-f_1(n))},$$

wenn die Summe $\sum\limits_n^{(2)}$ erstreckt wird über alle ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß n, $n+g_1$, $n+g_2$ und $n+g_1+g_2$ zwischen h und $h+H-1$ (Grenzen inkl.) liegen; in dieser Summe durchläuft n also $H-|g_1|-|g_2|$ konsekutive ganze Zahlen. Falls

$$f_2(n) = f_1(n+g_2) - f_1(n) = f(n+g_1+g_2) - f(n+g_1) - f(n+g_2) + f(n)$$

gesetzt wird, ist also

$$|S_h|^4 \leqq 2H \sum_{|g_1|+|g_2| \leqq H-1} \sum_n^{(2)} e^{2\pi i f_2(n)}.$$

Auf dieselbe Art werden wir jetzt die Ungleichung

$$(25)\qquad |S_h|^Q \leqq (2H)^{Q-q-1} \sum_{|g_1|+|g_2|+\dots+|g_q| \leqq H-1} \sum_n^{(q)} e^{2\pi i f_q(n)}$$

ableiten aus der entsprechenden Ungleichung mit $q-1$ statt q, also aus

$$(26)\qquad |S_h|^{\frac{1}{2}Q} \leqq (2H)^{\frac{1}{2}Q-q} \sum_{|g_1|+\dots+|g_{q-1}| \leqq H-1} \sum_n^{(q-1)} e^{2\pi i f_{q-1}(n)};$$

hierin ist für $1 \leq w \leq q$ die Summe $\sum\limits_{n}^{(w)}$ erstreckt über alle ganzzahligen n mit der Eigenschaft

$$h \leq n + \frac{1}{2}(g_1 + \dots + g_w) - \frac{1}{2}(|g_1| + \dots + |g_w|) \leq n + \frac{1}{2}(g_1 + \dots + g_w) + \frac{1}{2}(|g_1| + \dots + |g_w|) \leq h + H - 1,$$

so daß die Summe $\sum\limits_{n}^{(w)}$ erstreckt wird über $H - |g_1| - |g_2| - \dots - |g_w|$ konsekutive ganze Zahlen; ferner ist für $2 \leq w \leq q$ gesetzt

(27) $\quad f_w(n) = f_{w-1}(n + g_w) - f_{w-1}(n)$, also $f_q(n) = \Delta_g(n)$.

Da die Summe

$$\sum_{|g_1|+|g_2|+\dots+|g_{q-1}| \leq H-1}$$

weniger als $(2H)^{q-1}$ Glieder enthält, gibt die Schwarzsche Ungleichung, angewandt auf (26),

$$(28) \quad |S_h|^Q \leq (2H)^{Q-2q} \cdot (2H)^{q-1} \sum_{|g_1|+|g_2|+\dots+|g_{q-1}| \leq H-1} \Bigl| \sum_{n}^{(q-1)} e^{2\pi i f_{q-1}(n)} \Bigr|^2$$

und hierin ist

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \Bigl| \sum_{n}^{(q-1)} e^{2\pi i f_{q-1}(n)} \Bigr|^2 &= \sum_{p}^{(q-1)} \sum_{n}^{(q-1)} e^{2\pi i (f_{q-1}(p) - f_{q-1}(n))} \\ &= \sum_{|g_q| \leq H - |g_1| - \dots - |g_{q-1}|} \sum_{n}^{(q)} e^{2\pi i (f_{q-1}(n+g_q) - f_{q-1}(n))}. \end{aligned} \right.$$

Da der letzte Exponent durch $2\pi i f_q(n)$ ersetzt werden kann, folgt (25) aus (28) und (29).

Aus (25) und (27) ergibt sich

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{a \leq h \leq b-H+1} |S_h|^Q &\leq (2H)^{Q-q-1} \sum_{|g| \leq H-1} \sum_{a \leq h \leq b-H+1} \sum_{n}^{(q)} e^{2\pi i \Delta_g(n)} \\ &= (2H)^{Q-q-1} \sum_{|g| \leq H-1} \sum_{\alpha_g \leq n \leq \beta_g} e^{2\pi i \Delta_g(n)} \sum_{h} 1, \end{aligned} \right.$$

falls h in der Summe $\sum\limits_{h} 1$ alle ganzzahligen Werte durchläuft mit den Eigenschaften

$$(31) \qquad a \leq h \leq b - H + 1$$

und

$$(32) \quad h \leq n + \frac{1}{2}(g_1 + \dots + g_q) - \frac{1}{2}|g| \leq n + \frac{1}{2}(g_1 + \dots + g_q) + \frac{1}{2}|g| \leq h + H - 1;$$

h durchläuft also eine Anzahl konsekutiver Zahlen. Es ist stets $\sum\limits_{h} 1 \leq H$.

Die Anzahl der Gitterpunkte g mit $|g| \leqq H-1$ und $G=0$ ist $< q(2H)^{q-1}$ und für diese Gitterpunkte ist

$$\sum_{\alpha_g \leqq n \leqq \beta_g} e^{2\pi i A_g(n)} \sum_h 1 < (b-a)H,$$

also

$$(33) \qquad \sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G=0}} \sum_{\alpha_g \leqq n \leqq \beta_g} e^{2\pi i A_g(n)} \sum_h 1 < q(b-a)(2H)^q.$$

(31) ist äquivalent mit

$$\alpha_g - |g| \leqq h - \tfrac{1}{2}(g_1 + \ldots + g_q) - \tfrac{1}{2}|g| \leqq \beta_g - H + 1,$$

also äquivalent mit

$$n - \beta_g + H - 1 \leqq n - h + \tfrac{1}{2}(g_1 + \ldots + g_q) + \tfrac{1}{2}|g| \leqq n - \alpha_g + |g|$$

und (32) ist äquivalent mit

$$|g| \leqq n - h + \tfrac{1}{2}(g_1 + \ldots + g_q) + \tfrac{1}{2}|g| \leqq H - 1.$$

Hieraus folgt

$$(34) \quad \sum_h 1 = \operatorname{Min}(H, n - \alpha_g + |g| + 1) - \operatorname{Max}(|g|, n - \beta_g + H - 1).$$

Falls

$$A = \alpha_g + H - 1 - |g|, \qquad B = \beta_g - H + 1 + |g|$$

gesetzt wird, ist wegen (23) $A < B$, und aus (34) folgt, daß $\sum_h 1$ den Wert $H - |g|$, $n - \alpha_g + 1$ oder $\beta_g - n + 1$ hat, je nachdem $A \leqq n \leqq B$, $n \leqq A$ oder $B \leqq n$ ist. Die Summe $\sum_h 1$ ist also im Intervall $A \leqq n \leqq B$ konstant, in den Intervallen $\alpha_g \leqq n \leqq A$ und $B \leqq n \leqq \beta_g$ eine monotone Funktion von n. Wegen $|\sum_h 1| \leqq H$ gibt die partielle Summation, auf (21) angewendet, falls $|g| \leqq H-1$ und $G \neq 0$,

$$(35) \qquad \sum_{\alpha_g \leqq n \leqq \beta_g} e^{2\pi i A_g(n)} \sum_h 1 < H\,U_g.$$

Aus (30), (33) und (35) folgt (24), womit der Satz bewiesen ist.

Definition. *Wir werden sagen, daß die Zahlenpaare* (k_1, l_1), $(k_2, l_2), \ldots, (k_m, l_m)$, *deren Anzahl und deren Werte konstant vorausgesetzt werden, ein Exponentensystem bilden, wenn*

$$(36) \qquad 0 \leqq k_p \leqq \tfrac{1}{2} \qquad 0 \leqq l_p \leqq \tfrac{1}{2} \qquad (1 \leqq p \leqq m)$$

ist, und es zu jeder positiven Zahl s zwei nur von s abhängige Zahlen r und c (r ganz $\geqq 3$, $0 < c < \frac{1}{2}$) gibt, derart, daß stets die Ungleichung

$$(37)\qquad \sum_{a\leqq n\leqq b}' e^{2\pi i f(n)} \prec \sum_{p=1}^{m}{}' z^{k_p} a^{l_p}$$

in bezug auf s und t gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$(38)\qquad t > 0, \quad 1 \leqq a < b < at, \quad y > 0, \quad z = ya^{-s} > 1;$$

$f(n)$ ist im Intervall $a \leqq n \leqq b$ definiert, reell, r-mal differentiierbar[6]), *und für $a \leqq n \leqq b$, $0 \leqq p \leqq r-1$ ist*

$$(39)\qquad |f^{(p+1)}(n) - (-1)^p ys(s+1)\ldots(s+p-1)n^{-s-p}| < cys(s+1)\ldots(s+p-1)n^{-s-p}. \text{ [7])}$$

Das Zahlenpaar $(0, 1)$ bildet ein Exponentensystem; denn nach (38) ist die linke Seite von (37) absolut $\leqq b < ta = tz^0a^1$.

Aus Hilfssatz 6 ergibt sich, welche Bedeutung diese Definition für das Teilerproblem hat.

Hilfssatz 3. *Es sei $a < b$, $f(n)$ im Intervall $a \leqq n \leqq b$ definiert, reell und zweimal differentiierbar*[6]), $|f'(b) - f'(a)| < 2$, $f''(n)$ *stets* $\geqq \omega$ *oder stets* $\leqq -\omega$, *wo ω eine von n unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist*

$$\sum_{a\leqq n\leqq b}' e^{2\pi i f(n)} \prec \frac{1}{\sqrt{\omega}} + 1.$$

Beweis. Es werde Hilfssatz 1 angewandt mit

$$w = 3, \qquad A = \mathrm{Min}(f'(a), f'(b)) - \tfrac{1}{2}, \qquad B = \mathrm{Max}(f'(a), f'(b)) + \tfrac{1}{2}.$$

Die Summe

$$\sum_{A\leqq \nu\leqq B}' \int_a^b e^{2\pi i (f(n) - \nu n)} dn$$

enthält wegen $B - A < 3$ höchstens drei Glieder, und ein etwa vorkommendes Glied hat nach Hilfssatz 2, mit $f(n) - \nu n$ statt $f(n)$, einen Wert $\prec \frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Es ist also

$$\sum_{a\leqq n\leqq b}' e^{2\pi i f(n)} \prec \frac{3}{\sqrt{\omega}} + 3 + \log(2+3) \prec \frac{1}{\sqrt{\omega}} + 1.$$

Hilfssatz 4. *Falls N und P positive ganze Konstanten, u_n ($\geqq 0$) und v_p (> 0) ($1 \leqq n \leqq N$, $1 \leqq p \leqq P$) Konstanten bezeichnen, A_n und*

---

[7]) Für $p = 0$ bezeichne $s(s+1)\ldots(s+p-1)$ die Zahl 1.

B_p $(1 \leqq n \leqq N;\ 1 \leqq p \leqq P)$ *positiv sind, gibt es ein positives H mit der Eigenschaft*

$$(40)\qquad \sum_{n=1}^{N} A_n H^{u_n} + \sum_{p=1}^{P} B_p H^{-v_p} \prec \sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{P} \sqrt[u_n+v_p]{A_n^{v_p} B_p^{u_n}}.$$

Beweis. Falls eine (oder mehrere) der Zahlen u_n, nämlich u_ν, gleich Null ist, enthält (40) links ein Glied A_ν, rechts P Glieder A_ν $(n=\nu,\ 1 \leqq p \leqq P)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also diese Werte von n außer Betracht lassen, so daß wir alle u_n positiv voraussetzen können. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen

$$0 < u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_N; \qquad 0 < v_1 \leqq v_2 \leqq \ldots \leqq v_P.$$

Falls gesetzt wird

$$A(H) = \sum_{n=1}^{N} A_n H^{u_n}, \qquad B(H) = \sum_{p=1}^{P} B_p H^{-v_p},$$

ist

$$A\left(\frac{H}{2}\right) \leqq 2^{-u_1} A(H), \qquad A(2H) \leqq 2^{u_N} A(H),$$

$$B\left(\frac{H}{2}\right) \leqq 2^{v_P} B(H), \qquad B(2H) \leqq 2^{-v_1} B(H).$$

Wenn die linke Seite von (40) für $H = L$ möglichst klein ist, ist

$$2^{-u_1} A(L) + 2^{v_P} B(L) \geqq A\left(\frac{L}{2}\right) + B\left(\frac{L}{2}\right) \geqq A(L) + B(L)$$

und

$$2^{u_N} A(L) + 2^{-v_1} B(L) \geqq A(2L) + B(2L) \geqq A(L) + B(L),$$

also

$$(2^{v_P} - 1) B(L) \geqq (1 - 2^{-u_1}) A(L)$$

und

$$(2^{u_N} - 1) A(L) \geqq (1 - 2^{-v_1}) B(L),$$

woraus folgt

$$A(L) \succ\prec B(L).$$

Falls $A_\alpha L^{u_\alpha}$ $(1 \leqq \alpha \leqq N)$, bzw. $B_\beta L^{-v_\beta}$ $(1 \leqq \beta \leqq P)$ nicht kleiner ist als die andern Glieder von $A(L)$, bzw. von $B(L)$, dann ist

$$A_\alpha L^{u_\alpha} \succ\prec A(L) \quad \text{und} \quad B_\beta L^{-v_\beta} \succ\prec B(L).$$

Hieraus folgt

$$A_\alpha L^{u_\alpha} \succ\prec B_\beta L^{-v_\beta}, \quad \text{also} \quad L \succ\prec \sqrt[u_\alpha+v_\beta]{\frac{B_\beta}{A_\alpha}},$$

so daß die linke Seite von (40) für $H = L$ den Wert hat

$$A(L) + B(L) \succ\prec A(L) \succ\prec A_\alpha L^{u_\alpha} \succ\prec \sqrt[u_\alpha+v_\beta]{A_\alpha^{v_\beta} B_\beta^{u_\alpha}} \prec \sum_{n=1}^{N}\sum_{p=1}^{P} \sqrt[u_n+v_p]{A_n^{v_p} B_p^{u_n}}.$$

Hilfssatz 5. *Es sei $t > 0$, $1 \leqq a < b < at$, $x > 1$. Falls die Zahlenpaare (k_p, l_p) mit $k_p > 0$ $(1 \leqq p \leqq m)$ ein Exponentensystem bilden, ist*

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right) \prec \sum_{p=1}^{m} \sqrt[1+k_p]{x^{k_p} a^{l_p - k_p}} + x^{-\frac{1}{4}} a^{\frac{3}{4}}$$

in bezug auf t.

Beweis. Falls $\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$ gesetzt wird, ist für $H > 0$

$$H \int_0^{\pm\frac{1}{H}} \psi(u + v)\, dv = \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' c_h e^{2h\pi i u} \quad \text{mit} \quad c_h \prec \frac{1}{h} \quad \text{und} \quad c_h \prec \frac{H}{h^2},$$

wo der Strich bezeichnet, daß das Glied mit $h = 0$ weggelassen wird. Dann ist

$$(41) \qquad H \left| \sum_{a \leqq n \leqq b} \int_0^{\pm\frac{1}{H}} \psi\left(\frac{x}{n} + y\right) dy \right| \leqq \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' |c_h| \cdot \left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{hx}{n}} \right|.$$

Nach Hilfssatz 3 mit $f(n) = \frac{hx}{n}$ ist in den Gliedern mit $|h|x \leqq a^2$

$$(42) \qquad \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{hx}{n}} \prec \frac{1}{\sqrt{\frac{|h|x}{b^3}}} + 1 \prec |h|^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}},$$

wenn im Beweis dieses Hilfssatzes alle Ungleichungen mit dem Zeichen $\prec$ in bezug auf t genommen werden. In den andern Gliedern ist $|h|x > a^2$ und dabei sind die bei der Definition eines Exponentensystems genannten Voraussetzungen (38) und (39) erfüllt, falls gesetzt wird

$$s = 2, \quad r = 3, \quad c = \frac{1}{3}, \quad y = |h|x, \quad z = |h|x a^{-2}, \quad f(n) = -\frac{y}{u}.$$

Da die Zahlenpaare (k_p, l_p) $(1 \leqq p \leqq m)$ ein Exponentensystem bilden, ist also in den Gliedern mit $|h|x > a^2$

$$(43) \qquad \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{hx}{n}} \prec \sum_{p=1}^{m} z^{k_p} a^{l_p} = \sum_{p=1}^{m} |h|^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p}.$$

Aus (42) und (43) ergibt sich, daß in allen Fällen

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i \frac{hx}{n}} \prec \sum_{p=1}^{m} |h|^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p} + |h|^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$$

ist. Wegen $c_h \prec \frac{1}{h}$, $c_h \prec \frac{H}{h^2}$ und $k_p > 0$ folgt hieraus, daß die rechte Seite von (41)

$$<\sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \sum_{p=1}^{m} |h|^{k_p} x^{k_p} a^{l_p-2k_p} + |h|^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \right\} \cdot \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|h|}, \frac{H}{h^2}\right)$$

$$\leqq \sum_{p=1}^{m} x^{k_p} a^{l_p-2k_p} \left\{ \sum_{|h|\leqq H}{}' |h|^{k_p-1} + H \sum_{|h|>H} |h|^{k_p-2} \right\} + x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|h|^{\frac{3}{2}}}$$

$$<\sum_{p=1}^{m} H^{k_p} x^{k_p} a^{l_p-2k_p} + x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}$$

ist. Da für jedes Zahlenpaar u_1 und $u_2 > u_1$ die Ungleichung

$$\psi(u_2) - \psi(u_1) \leqq u_2 - u_1$$

gilt, ist

$$-\frac{b-a+1}{2H} + H \sum_{a\leqq n\leqq b} \int_0^{\frac{1}{H}} \psi\left(\frac{x}{n}+v\right) dv \leqq \sum_{a\leqq n\leqq b} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\leqq \frac{b-a+1}{2H} + H \sum_{a\leqq n\leqq b} \int_{-\frac{1}{H}}^{0} \psi\left(\frac{x}{n}+v\right) dv,$$

also wegen $b-a+1 < a$,

$$\sum_{a\leqq n\leqq b} \psi\left(\frac{x}{n}\right) < \sum_{p=1}^{m} H^{k_p} x^{k_p} a^{l_p-2k_p} + x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \frac{a}{H}.$$

Nach dem vorigen Hilfssatze ist die letzte Seite bei geeignet gewähltem positivem H wegen $k_p > 0$

$$< \sum_{p=1}^{m} \sqrt[1+k_p]{x^{k_p} a^{l_p-k_p}} + x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}},$$

womit der Hilfssatz 5 bewiesen ist.

Hilfssatz 6. *Falls die Zahlenpaare* (k_p, l_p) *mit* $0 < k_p < l_p$ $(1 \leqq p \leqq m)$ *ein Exponentensystem bilden, und* $x > 1$ *ist, dann ist*

$$\sum_{n\leqq\sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right) < \sum_{p=1}^{m} x^{\frac{k_p+l_p}{2(1+k_p)}} + x^{\frac{1}{4}}.$$

Beweis. Nach dem vorigen Hilfssatze mit $t=2$ ist wegen $0 < k_p < l_p$

$$\sum_{n\leqq\sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right) = \sum_{h=0}^{\left[\frac{\log x}{2\log 2}\right]} \sum_{1+\left[\frac{\sqrt{x}}{2^{h+1}}\right] \leqq n \leqq \left[\frac{\sqrt{x}}{2^h}\right]} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right)$$

$$< \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{p=1}^{m} \sqrt[1+k_p]{\frac{x^{k_p} x^{\frac{1}{2}(l_p-k_p)}}{2^{h(l_p-k_p)}}} + \frac{x^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{2}h}} \right\} < \sum_{p=1}^{m} \sqrt[2(1+k_p)]{x^{k_p+l_p}} + x^{\frac{1}{4}}.$$

Hilfssatz 7. *Es sei r ganz $\geqq 3$, $0 < a < b$, $f(n)$ im Intervall $a \leqq n \leqq b$ r-mal differentiierbar*[5]), $f''(n) < 0$, $\alpha = f'(b)$, $\beta = f'(a)$, *so daß $\alpha < \beta$ ist und zu jedem ν im Intervall $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$ die Zahl n_ν eindeutig bestimmt ist durch die Beziehungen $f'(n_\nu) = \nu$, $a \leqq n_\nu \leqq b$. Es werde $\varphi(\nu) = -f(n_\nu) + \nu n_\nu$ gesetzt. Es sei $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{\sigma} > 0$, $y > 0$, $\eta = y^\sigma$. Dann gibt es eine positive, nur von r, γ und s abhängige Zahl $c < \frac{1}{2}$, derart, daß aus*

$$(44)\qquad |f^{(p+1)}(n) - (-1)^p y s(s+1)\dots(s+p-1) n^{-s-p}| \\ < c y s(s+1)\dots(s+p-1) n^{-s-p}\ {}^{7)}$$

(gültig für alle $n \geqq a$ und $\leqq b$, alle ganzen $p \geqq 0$ und $\leqq r-1$) folgt, daß im Intervall $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$ auch $\varphi(\nu)$ r-mal differentiierbar[5]) *ist und die Ungleichung*

$$(45)\qquad |\varphi^{(p+1)}(\nu) - (-1)^p \eta\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p}| \\ < \gamma\eta\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p}\ {}^{7)}\quad (0 \leqq p \leqq r-1)$$

erfüllt.

Beweis. Es mögen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{12}$ Zahlen bezeichnen, welche zwar von allen Parametern abhängen dürfen, aber absolut genommen kleiner sind als eine nur von r, s und c abhängige positive Zahl, welche sich mit c bei gegebenen r und s der Null nähert. Aus (44) folgt

$$(46)\qquad f^{(p+1)}(n) = (-1)^p (1+\varepsilon_1) y s(s+1)\dots(s+p-1) n^{-s-p} \\ (a \leqq n \leqq b,\ 0 \leqq p \leqq r-1)$$

mit $|\varepsilon_1| < \frac{1}{2}$, und es genügt zu beweisen

$$(47)\qquad \varphi^{(p+1)}(\nu) = (-1)^p (1+\varepsilon_2)\eta\sigma(\sigma+1)\dots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p} \\ (\alpha \leqq \nu \leqq \beta,\ 0 \leqq p \leqq r-1);$$

denn dann können wir die nur von s, r und γ abhängige positive Zahl $c < \frac{1}{2}$ so wählen, daß $|\varepsilon_2| < \gamma$ ist, so daß (45) aus (47) folgt.

Wegen (46) ist

$$(48)\qquad \nu = f'(n_\nu) = (1+\varepsilon_1) y n_\nu^{-s}, \quad \text{also} \quad \varphi'(\nu) = n_\nu = (1+\varepsilon_3)\eta\nu^{-\sigma},$$

so daß (47) im Falle $p = 0$ schon bewiesen ist. Ferner ist nach (46) und (48)

$$\varphi''(\nu) = \frac{1}{\frac{d\nu}{dn_\nu}} = \frac{1}{f''(n_\nu)} = -\frac{1+\varepsilon_4}{y s n_\nu^{-s-1}} = -\frac{1+\varepsilon_5}{y s (\eta\nu^{-\sigma})^{-s-1}} \\ = -\frac{1+\varepsilon_5}{\eta^s \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \eta^{-s-1} \nu^{1+\sigma}} = -(1+\varepsilon_5)\eta\sigma\nu^{-\sigma-1},$$

womit (47) auch im Falle $p = 1$ bewiesen ist. Um (47) in den Fällen $2 \leqq p \leqq r-1$ zu beweisen, setzen wir $N_\nu = \eta \nu^{-\sigma}$,

$$F(N) = \frac{y}{1-s} N^{1-s} \quad \text{oder} \quad F(N) = y \log N \qquad (N > 0),$$

je nachdem $s \neq 1$ oder $s = 1$ ist. Dann ist nach (48) $n_\nu = (1 + \varepsilon_3) N_\nu$, also nach (46) für $0 \leqq p \leqq r-1$

$$(49) \qquad f^{(p+1)}(n_\nu) = (1+\varepsilon_1) F^{(p+1)}(n_\nu) = (1+\varepsilon_6) F^{(p+1)}(N_\nu).$$

Falls

$$\Phi(\nu) = -F(N_\nu) + \nu N_\nu \qquad (\alpha \leqq \nu \leqq \beta)$$

gesetzt wird, ist

$$\begin{aligned} \varphi(\nu) &= -f(n_\nu) + \nu n_\nu, & \Phi(\nu) &= -F(N_\nu) + \nu N_\nu, \\ \varphi'(\nu) &= n_\nu, & \Phi'(\nu) &= N_\nu, \\ \varphi''(\nu) &= \frac{1}{f''(n_\nu)}, & \Phi''(\nu) &= \frac{1}{F''(N_\nu)}, \end{aligned}$$

allgemein für $2 \leqq p \leqq r-1$ (wie man leicht mittels einer vollständigen Induktion beweist) bei geeignet gewählten Koeffizienten $w_{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}}$ (welche nur von den Parametern $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ abhängen),

$$(50) \quad \varphi^{(p+1)}(\nu) = \frac{1}{\{f''(n_\nu)\}^{2p-1}} \sum w_{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}} f^{(u_1+1)}(n_\nu) f^{(u_2+1)}(n_\nu) \ldots f^{(u_{p-1}+1)}(n_\nu$$

$$(51) \quad \Phi^{(p+1)}(\nu) = \frac{1}{\{F''(N_\nu)\}^{2p-1}} \sum w_{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}} F^{(u_1+1)}(N_\nu) F^{(u_2+1)}(N_\nu) \ldots F^{(u_{p-1}+1)}($$

falls die Summen Σ erstreckt werden über alle positiven ganzen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$, welche $\leqq p$ sind und deren Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} = 2p-2$ ist. Aus (50) und (49) folgt

$$\varphi^{(p+1)}(\nu) = \frac{1}{\{F''(N_\nu)\}^{2p-1}} \sum (1+\varepsilon_7) w_{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}} F^{(u_1+1)}(N_\nu) F^{(u_2+1)}(N_\nu) \ldots F^{(u_{p-1}+1)}($$

und hieraus folgt, mit Rücksicht auf (51)

$$\begin{aligned} &\varphi^{(p+1)}(\nu) - \Phi^{(p+1)}(\nu) \\ &= \frac{\varepsilon_8}{|F''(N_\nu)|^{2p-1}} \sum |w_{u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}}| \cdot |F^{(u_1+1)}(N_\nu) F^{(u_2+1)}(N_\nu) \ldots F^{(u_{p-1}+1)}(N_\nu)| \\ &= \frac{\varepsilon_9}{|F''(N_\nu)|^{2p-1}} \sum |F^{(u_1+1)}(N_\nu) F^{(u_2+1)}(N_\nu) \ldots F^{(u_{p-1}+1)}(N_\nu)| \\ &= \frac{\varepsilon_{10}}{(y N_\nu^{-s-1})^{2p-1}} \sum y^{p-1} N_\nu^{-s(p-1)-(u_1+u_2+\ldots+u_{p-1})} \\ &= \varepsilon_{10} \sum y^{-p} N_\nu^{ps+1} = \varepsilon_{11} y^{-p} N_\nu^{ps+1} \\ &= \varepsilon_{11} \eta^{-sp} (\eta \nu^{-\sigma})^{ps+1} = \varepsilon_{11} \eta \nu^{-\sigma-p} = \varepsilon_{12} \Phi^{(p+1)}(\nu) \end{aligned}$$

wegen $\Phi'(\nu) = \eta\nu^{-\sigma}$, also

$$\varphi^{(p+1)}(\nu) = (1+\varepsilon_{12})\,\Phi^{(p+1)}(\nu)$$
$$= (-1)^p(1+\varepsilon_{12})\,\eta\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+p-1)\,\nu^{-\sigma-p}.$$

Hiermit ist (47), also Hilfssatz 7 bewiesen.

Hilfssatz 8. *Falls die Zahlenpaare* $(\varkappa_p, \lambda_p)$ *mit* $\lambda_p \geqq \frac{1}{2}$ $(1 \leqq p \leqq \mu)$ *ein Exponentensystem bilden und gesetzt wird*

(52) $$k_p = \lambda_p - \frac{1}{2}, \quad l_p = \varkappa_p + \frac{1}{2} \; (1 \leqq p \leqq \mu), \quad k_{\mu+1} = \frac{2}{5}, \quad l_{\mu+1} = \frac{1}{2},$$

dann bilden auch die Zahlenpaare k_p, l_p $(1 \leqq p \leqq \mu+1)$ *ein Exponentensystem.*

Beweis. Wegen (36) ist

$$0 \leqq \varkappa_p \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leqq \lambda_p \leqq 1 \qquad (1 \leqq p \leqq \mu),$$

also nach (52)

$$0 \leqq k_p \leqq \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq l_p \leqq 1 \qquad (1 \leqq p \leqq \mu+1).$$

Wir müssen zeigen, daß es zu jeder positiven Zahl s die nur von s abhängigen Zahlen r und c (r ganz $\geqq 3$, $0 < c < \frac{1}{2}$) gibt, derart, daß die Ungleichung (37) mit $m = \mu + 1$ in bezug auf s und t aus den genannten Voraussetzungen (38) und (39) folgt; wir setzen also (38) und (39) voraus, indem wir später über r und c verfügen werden. Im Beweis dieses Hilfssatzes werden wir alle Ungleichungen mit dem Zeichen $\prec$ in bezug auf s und t nehmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $b > 2^{\frac{1}{s}}$ voraussetzen; denn sonst ist wegen (38) die linke Seite von (37) $\leqq b < 2^{\frac{1}{s}} z^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$. Nach (39) ist

(53) $$\frac{1}{2} y n^{-s} < f'(n) < 2 y n^{-s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} y s n^{-s-1} < -f''(n) < 2 y s n^{-s-1},$$

also $f''(n) < 0$, $0 < f'(b) < f'(a)$. Es werde gesetzt

$$f'(b) = \alpha, \quad f'(a) = \beta, \quad \frac{1}{s} = \sigma, \quad y^\sigma = \eta, \quad \zeta = \eta\alpha^{-\sigma}, \quad \tau = 4t^s.$$

Nach (53) ist

$$\frac{1}{2} y b^{-s} < \alpha < 2 y b^{-s}, \quad \frac{1}{2} z = \frac{1}{2} y a^{-s} < \beta < 2z.$$

Hieraus folgt

(54) $$\alpha \prec z; \quad 2^{-\sigma}\zeta < b < 2^\sigma \zeta, \quad \text{also} \quad 1 < \zeta \prec a$$

und

$$\frac{\beta}{\alpha} < \frac{2 y a^{-s}}{\frac{1}{2} y b^{-s}} < 4t^s = \tau, \quad \text{also} \quad 0 < \alpha < \beta < \alpha\tau.$$

Die Zahl n_ν ist im Intervall $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$ eindeutig bestimmt durch die Beziehungen $f'(n_\nu) = \nu$, $a \leqq n_\nu \leqq b$. Es werde für $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$ gesetzt $\varphi(\nu) = -f(n_\nu) + \nu n_\nu$. Wir werden vorläufig $\alpha \geqq 1$ voraussetzen. Dann ist

$$\sigma > 0, \quad \tau > 0, \quad 1 \leqq \alpha < \beta < \alpha\tau, \quad \eta > 0, \quad \zeta = \eta\alpha^{-\sigma} > 1.$$

Da die Zahlenpaare $(\varkappa_p, \lambda_p)$ $(1 \leqq p \leqq \mu)$ ein Exponentensystem bilden, gibt es dann nach der Definition eines Exponentensystems zwei nur von σ, also nur von s abhängige Zahlen ϱ und γ (ϱ ganz $\geqq 3$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$), derart, daß aus

$$\begin{aligned}(55)\qquad & |\varphi^{(p+1)}(\nu) - (-1)^p \eta\, \sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p}| \\ & \quad < \gamma\eta\,\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p}\end{aligned}$$ [7]

$(\alpha \leqq \nu \leqq \beta,\ 0 \leqq p \leqq \varrho - 1)$ für jedes Paar Zahlen α_0, β_0 mit $\alpha \leqq \alpha_0 < \beta_0 \leqq \beta$ folgt

$$(56)\qquad \sum_{\alpha_0 \leqq \nu \leqq \beta_0} e^{-2\pi i \varphi(\nu)} \prec \sum_{p=1}^{\mu} \zeta^{\varkappa_p} \alpha^{\lambda_p};$$

diese Ungleichung bezieht sich auf σ und τ, also auf s und t. Die letzte Ungleichung gilt auch im Falle $\alpha < 1$; denn falls die linke Seite nicht verschwindet, ist $\alpha\tau > \beta \geqq \beta_0 \geqq 1$, so daß dann wegen $\varkappa_1 \geqq 0$ und $\lambda_1 \geqq 0$ die linke Seite von (56) absolut

$$\leqq \beta < \alpha\tau < \tau \leqq \tau^{1+\lambda_1} \zeta^{\varkappa_1} \alpha^{\lambda_1}$$

ist.

Es werde $r = \varrho$ gesetzt. Nach Hilfssatz 7 können wir c, nur von r, γ und s also nur von s abhängig, so wählen, daß aus (39) Beziehung (55), also auch (56) folgt. Mit Rücksicht auf (54) ergibt sich aus (56)

$$(57)\qquad \sum_{\alpha_0 \leqq \nu \leqq \beta_0} e^{2\pi i (f(n_\nu) - \nu n_\nu)} \prec \sum_{p=1}^{\mu} z^{\lambda_p} a^{\varkappa_p}.$$

Nach (39) ist $f'''(n) > 0$, so daß $f''(n)$ eine monotone Funktion von n ist; wegen

$$\frac{d\nu}{dn_\nu} = \frac{df'(n_\nu)}{dn_\nu} = f''(n_\nu) < 0$$

ist n_ν eine monotone Funktion von ν. Hieraus folgt, daß $\frac{1}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}}$ eine monotone Funktion von ν bezeichnet, und zwar eine Funktion $\prec \frac{1}{\sqrt{z a^{-1}}} = z^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}$, so daß die partielle Summation, auf (57) angewendet, gibt

$$\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} \frac{e^{2\pi i (f(n_\nu) - \nu n_\nu)}}{\sqrt{|f''(n_\nu)|}} \prec z^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^{\mu} z^{\lambda_p} a^{\varkappa_p} = \sum_{p=1}^{\mu} z^{k_p} a^{l_p}$$

wegen (52).

Nach Satz 1 ist dann

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} \prec \sum_{p=1}^{\mu} z^{k_p} a^{l_p} + \frac{1}{\sqrt{z a^{-1}}} + \log(2 + z^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}) + z^{\frac{2}{5}} a^{\frac{1}{2}}$$
$$\prec \sum_{p=1}^{\mu} z^{k_p} a^{l_p} + z^{\frac{2}{5}} a^{\frac{1}{2}}$$

wegen $z > 1$ und $a \geqq 1$. Hiermit ist (37) mit $m = \mu + 1$, also der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 9. *Das Zahlenpaar* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *bildet ein Exponentensystem.*

Beweis. Wie schon bei der Definition eines Exponentensystems bemerkt wurde, bildet $(0, 1)$ ein Exponentensystem. Falls im vorigen Hilfssatze $\mu = 1$, $\varkappa_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$ gesetzt wird, findet man das Exponentensystem $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{2}{5}, \frac{1}{2})$. Da $z > 1$ vorausgesetzt wird, ist

$$z^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{2}{5}} a^{\frac{1}{2}} < 2 z^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}},$$

so daß das Zahlenpaar $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ allein schon ein Exponentensystem bildet.

Hilfssatz 10. *Falls die Zahlenpaare* $(\varkappa_p, \lambda_p)$ $(1 \leqq p \leqq \mu)$ *ein Exponentensystem bilden, q eine konstante ganze Zahl* > 0 *bezeichnet, und gesetzt wird*

$$(58) \quad \begin{cases} Q = 2^q, \quad k_p = \dfrac{\varkappa_p}{Q(q\varkappa_p + 1)}, \quad l_p = 1 - \dfrac{1}{Q} + \dfrac{\lambda_p}{Q(q\varkappa_p + 1)} \qquad (1 \leqq p \leqq \mu), \\ \qquad k_{\mu+1} = 0, \quad l_{\mu+1} = 1 - \dfrac{1}{2Q + q}, \end{cases}$$

dann bilden die Zahlenpaare (k_p, l_p) $(1 \leqq p \leqq \mu + 1)$ *ein Exponentensystem, und zwar mit* $l_p \geqq \frac{1}{2}$.

Beweis. Wegen (36) ist

$$0 \leqq \varkappa_p \leqq \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq \lambda_p \leqq 1, \qquad (1 \leqq p \leqq \mu),$$

also nach (58)

$$0 \leqq k_p \leqq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \leqq l_p \leqq 1, \qquad (1 \leqq p \leqq \mu + 1).$$

Wir müssen zeigen, daß es zu jeder positiven Zahl s die nur von s abhängigen Zahlen r und c (r ganz $\geqq 3$, $0 < c < \frac{1}{2}$) gibt, derart, daß (37) mit $m = \mu + 1$ aus den genannten Voraussetzungen (38) und (39) folgt; wir setzen also (38) und (39) voraus, indem wir später über r und c verfügen werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir beim Beweis $b - a \geqq 1$ voraussetzen, da sonst die linke Seite von (37) absolut $\leqq 1$ ist.

Es werde gesetzt $\sigma = s + q$, $\tau = t$. Die im Beweis dieses Hilfssatzes vorkommenden Ungleichungen mit den Zeichen $\prec$ und $\succ\prec$ beziehen sich

auf s und t, wir können auch sagen auf σ und τ, da q konstant vorausgesetzt wird.

Da die Zahlenpaare $(\varkappa_p, \lambda_p)$ $(1 \leqq p \leqq \mu)$ ein Exponentensystem bilden, gibt es zwei nur von σ, also nur von s abhängige Zahlen ϱ und γ (ϱ ganz $\geqq 3$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$), derart, daß stets die Ungleichung

$$\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} e^{2\pi i \varphi(\nu)} < \sum_{p=1}^{\mu} \zeta^{\varkappa_p} \alpha^{\lambda_p} \tag{59}$$

gilt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

$$1 \leqq \alpha < \beta < \alpha\tau, \qquad \eta > 0, \qquad \zeta = \eta\alpha^{-\sigma} > 1;$$

$\varphi(\nu)$ ist im Intervall $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$ definiert, reell, ϱ-mal differentiierbar[5]), und für $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$, $0 \leqq p \leqq \varrho - 1$ ist

$$\begin{aligned} &|\varphi^{(p+1)}(\nu) - (-1)^p \eta\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p}| \\ &\qquad < \gamma\eta\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+p-1)\nu^{-\sigma-p}. \end{aligned} \tag{60}$$ [7])

Wir setzen $r = \varrho + q + 1$ und wir wenden Satz 2 an. Da $f(n)$ $\varrho + q + 1$-mal differentiierbar ist, ist nach (20) auch $\Delta_g(\nu)$ im Intervall $\alpha_g \leqq \nu \leqq \beta_g$ $\varrho + q + 1$-mal differentiierbar[6]). Aus (27) ergibt sich mittels vollständiger Induktion

$$\Delta_g(\nu) = \int_0^{g_1} du_1 \int_0^{g_2} du_2 \ldots \int_0^{g_q} du_q f^{(q)}(\nu + u_1 + \ldots + u_q),$$

also für $0 \leqq p \leqq \varrho - 1$ im Intervall $\alpha_g \leqq \nu \leqq \beta_g$

$$\Delta_g^{(p+1)}(\nu) = \int_0^{g_1} du_1 \int_0^{g_2} du_2 \ldots \int_0^{g_q} du_q f^{(p+q+1)}(\nu + u_1 + \ldots + u_q),$$

also nach (39)

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta_g^{(p+1)}(\nu) = (-1)^{p+q}(1+\theta_1 c)ys(s+1)\ldots \\ &(s+p+q-1)\int_0^{g_1} du_1 \ldots \int_0^{g_q} du_q (\nu + u_1 + \ldots + u_q)^{-s-p-q}, \end{aligned} \right. \tag{61}$$

wo $|\theta_1|$ (desgl. $|\theta_2|$, $|\theta_3|$ und $|\theta_4|$ nachher) < 1 ist.

Wir wählen jetzt c $(0 < c < \frac{1}{2})$, nur von s abhängig, so daß für alle nicht-negativen ganzen $p \leqq \varrho - 1$ und alle θ_1 und θ_2

$$(1 + \theta_1 c)\cdot(1 + \theta_2 c)^{-s-p-q} = 1 + \theta_3\gamma$$

ist. Bei unserer Anwendung von Satz 2 setzen wir $H < ac$ voraus. Aus

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_q| \leqq |g_1| + |g_2| + \ldots + |g_q| < H < ac \leqq \nu c$$

folgt

$$\begin{aligned} (1+\theta_1 c)\cdot(\nu + u_1 + \ldots + u_q)^{-s-p-q} &= (1+\theta_1 c)\cdot(1+\theta_2 c)^{-s-p-q}\nu^{-s-p-q} \\ &= (1+\theta_3\gamma)\nu^{-s-p-q}. \end{aligned}$$

Dann ist nach (61) für $0 \leqq p \leqq \varrho - 1$ im Intervall $\alpha_g \leqq \nu \leqq \beta_g$

$$(-1)^q \Delta_g^{(p+1)}(\nu) = (-1)^p (1+\theta_4 \gamma)\, y s (s+1) \ldots (s+p+q-1)\, G \nu^{-s-p-q}.$$

Falls gesetzt wird

$$\varphi(\nu) = (-1)^q \Delta_g(\nu), \qquad \eta = y s (s+1) \ldots (s+q-1) G, \text{ [7]}$$

ist also für $0 \leqq p \leqq \varrho - 1$ im Intervall $\alpha_g \leqq \nu \leqq \beta_g$

$$\varphi^{(p+1)}(\nu) = (-1)^p (1+\theta_4 \gamma)\, \eta \sigma (\sigma+1) \ldots (\sigma+p-1)\, \nu^{-\sigma-p}, \text{ [7]}$$

so daß (60) gilt für jedes Zahlenpaar α, β mit der Eigenschaft $\alpha_g \leqq \alpha < \beta \leqq \beta_g$.

Es werde $\zeta = \eta \alpha^{-\sigma}$ gesetzt. Wegen $a \leqq \alpha < a t$ ist $\alpha \succ\!\prec a$, also

$$\zeta \succ\!\prec y G a^{-s-q} = z G a^{-q}.$$

Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $\zeta \leqq 1$ oder > 1 ist.

1. Es sei $\zeta \leqq 1$. Es ist im Intervall $\alpha \leqq \nu \leqq \beta$

$$0 < \frac{1}{2} \eta \nu^{-\sigma} < \varphi'(\nu) < \frac{3}{2} \eta \nu^{-\sigma} \leqq \frac{3}{2} \zeta < 2.$$

Nach Hilfssatz 3, mit α statt a, β statt b, $\varphi(\nu)$ statt $f(n)$, ist wegen $\alpha \prec a$ und $a \geqq 1$

$$\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} e^{2\pi i \varphi(\nu)} \prec \zeta^{-\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} + 1 \prec 2 \zeta^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \prec G^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2} q + \frac{1}{2}} < G^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2} q + \frac{1}{2}},$$

so daß in Satz 2 U_g durch den letzten Ausdruck ersetzt werden kann. Dann ist

$$\sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} U_g \prec a^{\frac{1}{2} q + \frac{1}{2}} \sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} G^{-\frac{1}{2}} \prec a^{\frac{1}{2} q + \frac{1}{2}} \Big(\sum_{1 \leqq g_1 \leqq H-1} g_1^{-\frac{1}{2}} \Big)^q \prec a^{\frac{1}{2} q + \frac{1}{2}} H^{\frac{1}{2} q},$$

also nach Satz 2

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} \prec H + \frac{a}{\sqrt[Q]{H}} + \sqrt[Q]{H^{-\frac{1}{2} q} a^{Q + \frac{1}{2} q - \frac{1}{2}}}. \tag{62}$$

Diese Ungleichung ist im Falle $\zeta \leqq 1$ bewiesen unter der Voraussetzung $H < ac$, und sie ist evident, wenn $H \geqq ac$ ist; denn die linke Seite von (62) ist dann absolut $\leqq b < at \leqq \frac{t}{c} H$.

Hilfssatz 4 besagt, daß bei geeignet gewähltem positivem H die rechte Seite von (62)

$$\prec a^{1 - \frac{1}{Q+1}} + a^{1 - \frac{1}{2Q+q}} \leqq 2 a^{1 - \frac{1}{2Q+q}} = 2 z^{k_{\mu+1}} a^{l_{\mu+1}}$$

ist, so daß (37) in diesem Falle bewiesen ist.

2. Es sei $\zeta > 1$. Dann sind alle für (59) notwendigen Bedingungen erfüllt, also

$$\sum_{\alpha \leqq \nu \leqq \beta} e^{2\pi i \varphi(\nu)} \prec \sum_{p=1}^{\mu} \zeta^{\varkappa_p} \alpha^{\lambda_p} \prec \sum_{p=1}^{\mu} G^{\varkappa_p} z^{\varkappa_p} a^{\lambda_p - q \varkappa_p}.$$

Wir können in Satz 2 U_g durch den letzten Ausdruck ersetzen; wegen $\varkappa_p \geqq 0$ ist

$$\sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} G^{\varkappa_p} < \Big\{ \sum_{1 \leqq g_1 \leqq H-1} g_1^{\varkappa_p} \Big\}^q < H^{q(\varkappa_p+1)},$$

also

$$\sum_{\substack{|g| \leqq H-1 \\ G \neq 0}} U_g < \sum_{p=1}^{\mu} H^{q(\varkappa_p+1)} z^{\varkappa_p} a^{\lambda_p - q\varkappa_p},$$

so daß Satz 3, unter der Voraussetzung $H < ac$, gibt

$$(63) \qquad \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} < H + \frac{a}{\sqrt[Q]{H}} + \sum_{p=1}^{\mu} \sqrt[Q]{H^{q\varkappa_p} z^{\varkappa_p} a^{Q-1+\lambda_p - q\varkappa_p}};$$

diese Ungleichung ist wiederum im Falle $H \geqq ac$ evident.

Wegen $\varkappa_p \geqq 0$ besagt Hilfssatz 4, daß bei geeignet gewähltem positivem H die rechte Seite von (63)

$$< a^{1-\frac{1}{Q}} + \sum_{p=1}^{\mu} z^{\frac{\varkappa_p}{Q(q\varkappa_p+1)}} a^{1-\frac{1}{Q}+\frac{\lambda_p}{Q(q\varkappa_p+1)}} < a^{1-\frac{1}{2Q+q}} + \sum_{p=1}^{\mu} z^{k_p} a^{l_p}$$

ist, womit der Hilfssatz vollständig bewiesen ist.

Hilfssatz 11. *Falls die Zahlenpaare* $(\varkappa_p, \lambda_p)$ $(1 \leqq p \leqq \mu)$ *ein Exponentensystem bilden,* q *eine konstante ganze Zahl* > 0 *bezeichnet, und gesetzt wird*

$$Q = 2^q, \quad k_p = \frac{1}{2} - \frac{1}{Q} + \frac{\lambda_p}{Q(q\varkappa_p+1)}, \quad l_p = \frac{1}{2} + \frac{\varkappa_p}{Q(q\varkappa_p+1)} \quad (1 \leqq p \leqq \mu);$$

$$k_{\mu+1} = \mathrm{Max}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2Q+q}\right), \quad l_{\mu+1} = \frac{1}{2};$$

dann bilden auch die Zahlenpaare (k_p, l_p) $(1 \leqq p \leqq \mu+1)$ *ein Exponentensystem.*

Beweis. Da die Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes erfüllt sind, bilden die Zahlenpaare

$$\varkappa_p' = \frac{\varkappa_p}{Q(q\varkappa_p+1)}, \qquad \lambda_p' = 1 - \frac{1}{Q} + \frac{\lambda_p}{Q(q\varkappa_p+1)} \qquad (1 \leqq p \leqq \mu);$$

$$\varkappa_{\mu+1}' = 0, \qquad \lambda_{\mu+1}' = 1 - \frac{1}{2Q+q}$$

ein Exponentensystem mit $\lambda_p' \geqq \frac{1}{2}$ $(1 \leqq p \leqq \mu+1)$. Nach Hilfssatz 8 bilden dann auch die Zahlenpaare (k_p, l_p) $(1 \leqq p \leqq \mu+1)$ ein Exponentensystem.

Hilfssatz 12. *Die Zahlenpaare* $\left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right)$ *und* $\left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right)$ *bilden ein Exponentensystem.*

Beweis. Da nach Hilfssatz 9 das Zahlenpaar $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ein Exponentensystem bildet, können wir den vorigen Hilfssatz mit $q = 1$, $\mu = 1$, $(\varkappa_1, \lambda_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ anwenden. Dann ist

$$k_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{1}{6}; \qquad l_1 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{2}{3};$$

$$k_2 = \mathrm{Max}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}; \qquad l_2 = \frac{1}{2}.$$

Hilfssatz 13. *Die Zahlenpaare* $\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $\left(\frac{5}{28}, \frac{18}{28}\right)$ *und* $\left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right)$ *bilden ein Exponentensystem.*

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 11 an mit $q = 1$, $\mu = 2$ und mit den Zahlenpaaren

$$(\varkappa_1, \lambda_1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}\right), \qquad (\varkappa_2, \lambda_2) = \left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right),$$

welche nach dem vorigen Hilfssatz ein Exponentensystem bilden. Dann ist

$$k_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{4}{2(1+6)} = \frac{2}{7}; \qquad l_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+6)} = \frac{4}{7};$$

$$k_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2(4+10)} = \frac{5}{28}; \qquad l_2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2(4+10)} = \frac{18}{28};$$

$$k_3 = \mathrm{Max}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}; \qquad l_3 = \frac{1}{2}.$$

Hilfssatz 14. *Die Zahlenpaare* $\left(\frac{43}{104}, \frac{54}{104}\right)$, $\left(\frac{147}{344}, \frac{177}{344}\right)$, $\left(\frac{71}{176}, \frac{92}{176}\right)$ *und* $\left(\frac{17}{38}, \frac{19}{38}\right)$ *bilden ein Exponentensystem.*

Beweis. Wir wenden Hilfssatz 11 an mit $q = 3$, $\mu = 3$ und mit den Zahlenpaaren

$$(\varkappa_1, \lambda_1) = \left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right), \qquad (\varkappa_2, \lambda_2) = \left(\frac{5}{28}, \frac{18}{28}\right), \qquad (\varkappa_3, \lambda_3) = \left(\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right),$$

welche nach dem vorigen Hilfssatz ein Exponentensystem bilden. Dann ist

$$k_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{4}{8(6+7)} = \frac{43}{104}; \qquad l_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{8(6+7)} = \frac{54}{104};$$

$$k_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{18}{8(15+28)} = \frac{147}{344}; \qquad l_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{8(15+28)} = \frac{177}{344};$$

$$k_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{5}{8(12+10)} = \frac{71}{176}; \qquad l_3 = \frac{1}{2} + \frac{4}{8(12+10)} = \frac{92}{176};$$

$$k_4 = \mathrm{Max}\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2} - \frac{1}{19}\right) = \frac{17}{38}; \qquad l_4 = \frac{1}{2}.$$

Beweis von (1). Wir wenden die Hilfssätze 6 und 14 an. Dann ist

$$(k_1, l_1) = \left(\frac{43}{104}, \frac{54}{104}\right); \qquad \frac{k_1 + l_1}{2(1 + k_1)} = \frac{43 + 54}{2(104 + 43)} = \frac{97}{294} < \frac{33}{100},$$

$$(k_2, l_2) = \left(\frac{147}{344}, \frac{177}{344}\right); \qquad \frac{k_2 + l_2}{2(1 + k_2)} = \frac{147 + 177}{2(344 + 147)} = \frac{162}{491} < \frac{33}{100};$$

$$(k_3, l_3) = \left(\frac{71}{176}, \frac{92}{176}\right); \qquad \frac{k_3 + l_3}{2(1 + k_3)} = \frac{71 + 92}{2(176 + 71)} = \frac{163}{494} < \frac{33}{100};$$

$$(k_4, l_4) = \left(\frac{17}{38}, \frac{19}{38}\right); \qquad \frac{k_4 + l_4}{2(1 + k_4)} = \frac{17 + 19}{2(38 + 17)} = \frac{18}{55} < \frac{33}{100}.$$

Utrecht, den 23. Oktober 1921.

(Eingegangen am 24. 10. 1921.)

Über Summen, die mit den elliptischen ϑ-Funktionen zusammenhängen.

Von

J. G. van der Corput in Freiburg (Schweiz).

---

§ 1.

Es bezeichnen x, y, z, a und b reelle Zahlen, $x \neq 0$, und es werde gesetzt

$$(1) \qquad J(x, y, z) = \frac{\lambda_{xz}}{\sqrt{|x|}} e^{-\frac{\pi i}{x}(xy-z)^2} \int_{\frac{|z|}{\sqrt{|x|}}}^{\infty} e^{\pm \pi i v^2} dv$$

mit $\lambda_{xz} = -1, 0$ oder $+1$, je nachdem xz positiv, null oder negativ ist; in dieser Note benutze man immer das obere oder das untere Zeichen, je nachdem x positiv oder negativ ist.

In § 2 werde ich beweisen, daß

$$(2) \qquad \operatorname*{Lim}_{N=\infty} \sum_{n=-N}^{N} J(x, y, z-n)$$

existiert, und, mit $F(x, y, z)$ bezeichnet, die Eigenschaft besitzt:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} & F(x, b, xb+z) - F(x, a, xa+z) \\ & = \sum_{n=a}^{b}{}' e^{\pi i(xn^2+2zn)} - \frac{i \pm 1}{\sqrt{2|x|}} \sum_{n=xa+z}^{xb+z}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2}, \end{aligned} \right.$$

wo die Striche die folgende Bedeutung haben:

1. falls $a < b$ ist, wird die Summe $\sum\limits_{n=a}^{b}{}'$ erstreckt über die ganzzahligen n im Intervall $a \leqq n \leqq b$, wobei das Glied mit $n = a$ bzw. $n = b$ gegebenenfalls nur halb gezählt wird,

2. falls $a = b$ ist, ist $\sum\limits_{n=a}^{b}{}' = 0$,

3. falls $a > b$ ist, ist $\sum\limits_{n=a}^{b}{}' = -\sum\limits_{n=b}^{a}{}'$.

In § 3 wird $e^{\pi i z y^2} F(x, y, z)$ asymptotisch entwickelt nach steigenden Potenzen von x; in § 4 wird gezeigt

$$(4)\qquad |F(x, y, z)| < \frac{1}{2\sqrt{|x|}} + 1 + 2|x|;$$

in § 5 wird hieraus abgeleitet, daß die rechte Seite von (3) absolut kleiner ist als $\frac{7}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$, und im selben Paragraphen wird noch unter der Voraussetzung, daß $b - a$, $x(b - a)$ und $\frac{x}{2}(b - a)^2 + z(b - a)$ ganz sind, bewiesen:

$$(5)\qquad \sum_{n=a}^{b}{}' e^{\pi i(xn^2 + 2zn)} = \frac{i \pm 1}{\sqrt{2|x|}} \sum_{n=xa+z}^{xb+z}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2};$$

für jedes positive ganze q hat also die Gaußsche Summe

$$\sum_{n=0}^{q}{}' e^{2\pi i \frac{n^2}{q}} = \frac{i+1}{2}\sqrt{q} \sum_{n=0}^{2}{}' e^{-\frac{1}{2}\pi i n^2 q} = \frac{i+1}{2}\sqrt{q}\,(1 + e^{-\frac{1}{2}q\pi i})$$

den Wert $(i+1)\sqrt{q}$, $\sqrt{q}$, 0 oder $i\sqrt{q}$, je nachdem $q \equiv 0, 1, 2$ oder 3 (mod 4).

Die Herren Hardy und Littlewood[1]) betrachten ($n > 0$ vorausgesetzt) die Summen

$$s_n^2(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n}{}' e^{(\nu-\frac{1}{2})^2 \pi i x} \cos(2\nu - 1)\pi\theta, \qquad \sigma_n^2(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n}{}' e^{(\nu-\frac{1}{2})^2 \pi i x} \sin(2\nu - 1)\pi\theta,$$

$$s_n^3(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n}{}' e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi\theta, \qquad \sigma_n^3(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n}{}' e^{\nu^2 \pi i x} \sin 2\nu\pi\theta,$$

$$s_n^4(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n}{}' (-1)^\nu e^{\nu^2 \pi i x} \cos 2\nu\pi\theta, \qquad \sigma_n^4(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{n}{}' (-1)^\nu e^{\nu^2 \pi i x} \sin 2\nu\pi\theta,$$

und mittels des Cauchyschen Integralsatzes aus der komplexen Funktionentheorie beweisen sie unter der Voraussetzung $0 < x \leqq 1$, $|\theta| \leqq 1$, daß es eine (von n, x und θ unabhängige) Konstante K gibt mit der Eigenschaft

$$(6)\qquad \left.\begin{cases} \left| s_n^\lambda(x, \theta) - \frac{i+1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{\pi i \theta^2}{x}} s_{nx}^{6-\lambda}\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right)\right| < \frac{K}{\sqrt{x}} \\ \left| \sigma_n^\lambda(x, \theta) - \frac{i+1}{\sqrt{2x}} e^{-\frac{\pi i \theta^2}{x}} \sigma_{nx}^{6-\lambda}\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right)\right| < \frac{K}{\sqrt{x}} \end{cases}\right\} \lambda = 2, 3 \text{ und } 4.$$

---

[1]) G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Some Problems of Diophantine Approximation. II. The trigonometrical series associated with the elliptic ϑ-functions [Acta Mathematica 37 (1914), S. 193–238], S. 193–219.

Wie im letzten Paragraphen gezeigt wird, ist diese Ungleichung äquivalent mit der Beziehung, daß bei geeignet gewähltem konstantem K_1 die rechte Seite von (3) absolut kleiner als $K_1\left(1+\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)$ ist; wie schon bemerkt wurde, genügt $K_1 = \frac{7}{2}$.

§ 2.

Mittels partieller Integration folgt aus (1) im Falle $z \neq 0$

$$(7) \qquad J(x, y, z) = \frac{e^{\pi i(-xy^2+2yz)}}{2\pi i z} - \frac{\lambda_{xz}}{4\pi^2} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi i}{x}(xy-z)^2}}{\sqrt{|x|}} \int\limits_{\frac{|z|}{\sqrt{|x|}}}^{\infty} \frac{d e^{\pm \pi i v^2}}{v^2}$$

und nach dem zweiten Mittelwertsatz, angewendet auf den reellen und auf den imaginären Teil des letzten Integrals, ist das Schlußglied absolut höchstens

$$\frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{2\sqrt{2|x|}}{|z|^2}.$$

Da

$$(8) \qquad \lim_{N=\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq z}}^{N} \frac{e^{-2\pi i n y}}{2\pi i(z-n)}$$

existiert, existiert also auch der Grenzwert (2). Es werde dieser Grenzwert (2) mit $F(x, y, z)$ bezeichnet.

Wegen (1) ist $J(x, y, z)$ die konjugiert-komplexe Zahl von $J(-x, y, -z)$, also $F(x, y, z)$ die konjugiert-komplexe Zahl von $F(-x, y, -z)$. Falls x und z durch $-x$ und $-z$ ersetzt werden, wird also die linke Seite von (3) durch die konjugiert-komplexe Zahl ersetzt, und dies ist auch der Fall mit der rechten Seite von (3), da

$$(i \pm 1) \sum_{n=xa+z}^{xb+z}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2} = (-i \mp 1) \sum_{n=-xa-z}^{-xb-z}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(-n-z)^2}$$

die konjugiert-komplexe Zahl von

$$(i \mp 1) \sum_{n=-xa-z}^{-xb-z}{}' e^{\frac{\pi i}{x}(n+z)^2}$$

ist.

Beim Beweis von (3) können wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x > 0$ voraussetzen. Außerdem dürfen wir noch $a \leqq b$ annehmen, da bei Vertauschung von a und b beide Seiten mit -1 multipliziert werden.

Es werde

$$\frac{xa+z-n}{\sqrt{x}}=\alpha_n, \qquad \frac{xb+z-n}{\sqrt{x}}=\beta_n, \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2}\int\limits_A^B e^{\pi i v^2}\,dv=P_n(A,B)$$

gesetzt. Aus (1) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} J(x,b,xb+z-n) &= -P_n(\beta_n,\infty) && \text{falls } n<xb+z,\\ &= -\tfrac{1}{2}P_n(\beta_n,\infty)+\tfrac{1}{2}P_n(-\infty,\beta_n) && \text{falls } n=xb+z,\\ &= P_n(-\infty,\beta_n) && \text{falls } n>xb+z. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_{n=-N}^{N}{}' J(x,b,xb+z-n)-\sum_{n=-N}^{N}{}' J(x,a,xa+z-n)$$

$$=-\sum_{n=-N}^{xb+z}{}' P_n(\beta_n,\infty)+\sum_{n=xb+z}^{N}{}' P_n(-\infty,\beta_n)+\sum_{n=-N}^{xa+z}{}' P_n(\alpha_n,\infty)-\sum_{n=xa+z}^{N}{}' P_n(-\infty,\alpha_n)$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}{}' P_n(\alpha_n,\beta_n)-\sum_{n=xa+z}^{xb+z}{}' P_n(-\infty,\infty),$$

also

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x,b,xb+z)-F(x,a,xa+z)\\ &=\lim_{N=\infty}\left\{\sum_{n=-N}^{N}{}' J(x,b,xb+z-n)-\sum_{n=-N}^{N}{}' J(x,a,xa+z-n)\right\}\\ &=\lim_{N=\infty}\sum_{n=-N}^{N}{}' P_n(\alpha_n,\beta_n)-\sum_{n=xa+z}^{xb+z}{}' P_n(-\infty,\infty). \end{aligned}\right.$$

Es ist

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{N=\infty}\sum_{n=-N}^{N}{}' P_n(\alpha_n,\beta_n)=\frac{1}{\sqrt{x}}\lim_{N=\infty}\sum_{n=-N}^{N}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2}\int\limits_{\frac{xa+z-n}{\sqrt{x}}}^{\frac{xb+z-n}{\sqrt{x}}} e^{\pi i v^2}\,dv\\ &=\lim_{N=\infty}\sum_{n=-N}^{N}{}'\int\limits_a^b e^{\pi i(xu^2+2zu-2nu)}\,du=\sum_{n=a}^{b}{}' e^{\pi i(xn^2+2zn)} \end{aligned}\right.$$

nach der Dirichletschen Theorie der Fourierschen Reihen, und es ist

$$(11)\qquad P_n(-\infty,\infty)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i v^2}\,dv=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2}\cdot\frac{i+1}{\sqrt{2}}.$$

Aus (9), (10) und (11) folgt (3).

§ 3.

Es sei p ganz $\geqq 0$. Mittels p mal angewendeter partieller Integration leitet man aus (1) ab, im Falle $z \neq 0$,

$$J(x, y, z) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1) x^m e^{\pi i(-xy^2+2yz)}}{(2\pi i)^{m+1} z^{2m+1}}$$

$$+ \frac{\lambda_{xz}}{\sqrt{|x|}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{(2\pi i)^{p+1}} e^{-\frac{\pi i}{x}(xy-z)^2} \int_{\frac{|z|}{\sqrt{|x|}}}^{\infty} \frac{d e^{\pm \pi i v^2}}{v^{2p+1}}. \text{[2]}$$

Der zweite Mittelwertsatz, angewendet auf den reellen und auf den imaginären Teil des letzten Integrals, zeigt, daß das Schlußglied absolut

$$\leqq \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{(2\pi)^{p+1}} \cdot \frac{2\sqrt{2}|x|^p}{|z|^{2p+1}} \leqq \frac{p!\,|x|^p}{\pi^{p+1}\sqrt{2}\,|z|^{2p+1}}$$

ist. Es ist also

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} e^{\pi i x y^2} F(x, y, z) &= e^{2\pi i y z} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1) x^m}{(2\pi i)^{m+1}} \lim_{N=\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq z}}^{N} \frac{e^{-2\pi i n y}}{(z-n)^{2m+1}} \\ &\quad + \frac{\theta_1 \cdot p!\,|x|^p}{\pi^{p+1}\sqrt{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq z}}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^{2p+1}}; \end{aligned} \right.$$

hierin ist θ_1 (desgl. $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ nachher) absolut $\leqq 1$.

Auf dieselbe Art beweist man

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & e^{\pi i x y^2} F(x, y, z) = e^{\pi i x y^2} J\left(x, y, z - \left[z + \tfrac{1}{2}\right]\right) \\ & + e^{2\pi i y z} \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1) x^m}{(2\pi i)^{m+1}} \lim_{N=\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq [z+\frac{1}{2}]}}^{N} \frac{e^{-2\pi i n y}}{(z-n)^{2m+1}} \\ & + \frac{\theta_2 \cdot p!\,|x|^p}{\pi^{p+1}\sqrt{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq [z+\frac{1}{2}]}}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^{2p+1}}. \end{aligned} \right.$$

Wir werden jetzt zwei Fälle unterscheiden, je nachdem z ganz ist oder nicht.

1. Es sei z ganz. Dann ist

$$(14)\quad \lim_{N=\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq z}}^{N} \frac{e^{2\pi i (z-n) y}}{(z-n)^{2m+1}} = \lim_{N=\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^{N} \frac{e^{2\pi i n y}}{n^{2m+1}} = (-1)^{m+1} i \frac{(2\pi)^{2m+1}}{(2m)!} B_{2m}(\eta);$$

---

[2]) Falls $m = 0$ ist, bezeichnet das Produkt $1 \cdot 3 \ldots (2m-1)$ die Zahl 1.

hierin ist $\eta = 0$ oder $= y - [y] - \frac{1}{2}$, je nachdem y ganz ist oder nicht; es ist $B_0(\eta) = \eta$, und für $m > 0$ bezeichnet $B_{2m}(\eta)$ die Bernoullische Funktion vom Grade $2m+1$, d. h. es ist

$$B_{2m}(\eta) = \frac{\eta^{2m+1}}{2m+1} - \frac{\eta^{2m}}{2} + \binom{2m}{1}\cdot\frac{B_1}{2}\eta^{2m-1}$$
$$- \binom{2m}{3}\cdot\frac{B_2}{4}\eta^{2m-3} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{2m}{2m-1}\cdot\frac{B_m}{2m}\eta,$$

wo die B_n die Bernoullischen Zahlen sind.

Ferner ist

$$(15) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq z}}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^{2p+1}} = \sqrt{2}\,\zeta(2p+1) \leqq \sqrt{2}\,\zeta(3) < \frac{\pi}{2}.$$

Wegen

$$\frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1) z^m}{(2\pi i)^{m+1}} \cdot \frac{(-1)^{m+1} i (2\pi)^{2m+1}}{(2m)!} = -\frac{(\pi i z)^m}{m!}$$

folgt aus (12), (14) und (15)

$$(16) \qquad e^{\pi i z y^2} F(x, y, z) = -\sum_{m=0}^{p-1} \frac{B_{2m}(\eta)}{m!}(\pi i z)^m + \frac{1}{2}\theta_2 \cdot p!\,\frac{|z|^p}{\pi^p}.$$

2. Es sei z nicht ganz. Dann ist

$$(17) \qquad \frac{1\cdot 3 \ldots (2m-1)}{(2\pi i)^{m+1}} \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-2\pi i n y}}{(z-n)^{2m+1}} = \frac{1}{m!\,(4\pi i)^m} \cdot \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} \sum_{n=-N}^{N} \frac{e^{-2\pi i n y}}{2\pi i (z-n)},$$

wenn bei dieser Differentiation y als eine Konstante betrachtet wird. Falls der Grenzwert (8) mit $V(z)$ bezeichnet wird, ist bekanntlich

$$(18) \qquad V(z) = \frac{1}{2i}\operatorname{cotg} \pi z \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2i \sin \pi z} \cdot e^{-2\pi i z (y - [y] - \frac{1}{2})},$$

je nachdem y ganz ist oder nicht.

Ferner ist

$$(19) \qquad \frac{1}{\pi^{p+1}\sqrt{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^{2p+1}} < \frac{\pi^p}{|\sin \pi z|^{2p+1}};$$

beim Beweis dieser Ungleichung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < z \leqq \frac{1}{2}$ voraussetzen; wenn p durch $p+1$ ersetzt wird, wird die linke Seite von (19) mit einer Zahl $< \frac{1}{\pi z^2}$, die rechte Seite mit einer größeren Zahl, nämlich mit $\frac{\pi}{\sin^2 \pi z}$ multipliziert, so daß es genügt, Ungleichung (19) für $p = 1$ zu beweisen, und dann ist

$$\frac{1}{\pi^3\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-n|^3}<\frac{1}{\pi^3\cdot\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}+\frac{1}{1^3}+\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3}+\dots\right)$$

$$<\frac{3}{4\pi^3}\left(\frac{\pi^3}{\sin^3\pi z}+8\zeta(3)\right)<\frac{3}{4\pi^3}\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\pi^3}{\sin^3\pi z}=\frac{\pi}{\sin^3\pi z}.$$

Hiermit ist (19) bewiesen, und aus (12), (17), (18) und (19) folgt

$$e^{\pi i x y^2}F(x,y,z)$$

$$=e^{2\pi i y z}\left(V(z)+\frac{1}{1!}\left(\frac{x}{4\pi i}\right)V''(z)+\dots+\frac{1}{(p-1)!}\cdot\left(\frac{x}{4\pi i}\right)^{p-1}V^{(2p-2)}(z)\right)$$

$$+\theta_4\cdot\frac{p!\,\pi^p\,|x|^p}{|\sin\pi z|^{2p+1}}.$$

Da diese Beziehung bei kleinen $|\sin\pi z|$ unscharfe Ergebnisse liefert, werden wir noch eine andere as; mptotische Entwicklung für $e^{\pi i x y^2}F(x,y,z)$ ableiten. Es ist

$$\frac{1\cdot 3\dots(2m-1)}{(2\pi i)^{m+1}}\lim_{N=\infty}\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq[z+\frac{1}{2}]}}^{N}\frac{e^{-2\pi i n y}}{|z-n|^{2m+1}}$$

$$=\frac{1}{m!\,(4\pi i)^m}\cdot\frac{d^{2m}}{dz^{2m}}\left(V(z)-\frac{e^{-2\pi i[z+\frac{1}{2}]y}}{2\pi i\left(z-\left[z+\frac{1}{2}\right]\right)}\right),\ ^{3})$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq[z+\frac{1}{2}]}}^{\infty}\frac{1}{|z-n|^{2p+1}}<\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^{2p+2}\zeta(2p+1)<2^{2p+2},$$

so daß aus (13) folgt

$$\left\{\begin{aligned} &e^{\pi i x y^2}F(x,y,z)=e^{\pi i x y^2}J\left(x,y,z-\left[z+\frac{1}{2}\right]\right)\\ &+e^{2\pi i y z}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{1}{m!}\left(\frac{x}{4\pi i}\right)^m\frac{d^{2m}}{dz^{2m}}\left(V(z)-\frac{e^{-2\pi i[z+\frac{1}{2}]y}}{2\pi i\left(z-\left[z+\frac{1}{2}\right]\right)}\right)\\ &+\theta_5\cdot\frac{p!\,2^{2p+2}|x|^p}{\pi^{p+1}}.\end{aligned}\right. \tag{21}$$

---

[3]) In den Punkten, wo $z+\frac{1}{2}$ ganz ist, ist die Derivierte nach rechts gemeint.

§ 4.

Beim Beweis von (4) dürfen wir z nicht-ganz voraussetzen, da sonst $|F(x, y, z)|$ nach (16) mit $p = 1$ höchstens $\frac{1}{2} + \frac{|x|}{2\pi}$ ist.

Aus den für positives u gültigen Ungleichungen

$$\left|\int_u^\infty \cos \pi v^2\, dv\right| < \int_0^\infty \cos \pi v^2\, dv, \qquad \left|\int_u^\infty \sin \pi v^2\, dv\right| < \int_0^\infty \sin \pi v^2\, dv$$

folgt

$$\left|J\left(x, y, z - \left[z + \frac{1}{2}\right]\right)\right| < \frac{1}{\sqrt{|x|}}\left|\int_0^\infty e^{\pi i v^2}\, dv\right| = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cdot \left|\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{|x|}},$$

so daß sich aus (20) mit $p = 1$ ergibt

$$|F(x, y, z)| < \left|V(z) - \frac{e^{-2\pi i\left[z+\frac{1}{2}\right]y}}{2\pi i\left(z - \left[z + \frac{1}{2}\right]\right)}\right| + \frac{1}{2\sqrt{|x|}} + 2|x|.$$

Es genügt also unter der Voraussetzung, daß z nicht ganz ist, zu beweisen

$$\left|V(z) - \frac{e^{-2\pi i\left[z+\frac{1}{2}\right]y}}{2\pi i\left(z - \left[z + \frac{1}{2}\right]\right)}\right| < 1, \tag{21}$$

und dabei werden wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem y ganz ist oder nicht.

1. Es sei y ganz. Dann ist nach (18) die linke Seite von (21)

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\pi\left(z - \left[z + \frac{1}{2}\right]\right)} - \operatorname{cotg} \pi z\right|, \tag{22}$$

so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < z \leqq \frac{1}{2}$ voraussetzen können. Es ist unmittelbar klar, daß der Ausdruck (22) für $z = \frac{1}{2}$ kleiner als 1 ist, und sonst ist dieser Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi z} - \operatorname{cotg} \pi z\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin \pi z} - \operatorname{cotg} \pi z\right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2} < 1.$$

2. Es sei y nicht ganz. Dann ist nach (18) die linke Seite von (21)

$$\frac{1}{2}\left|\frac{e^{-2\pi i\left[z+\frac{1}{2}\right]y}}{\pi\left(z - \left[z + \frac{1}{2}\right]\right)} - \frac{e^{-2\pi i z\left(y - [y] - \frac{1}{2}\right)}}{\sin \pi z}\right|, \tag{23}$$

so daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 < z \leqq \frac{1}{2}$ und $0 < y < 1$

voraussetzen können. Es ist unmittelbar klar, daß der Ausdruck (23) für $z = \frac{1}{2}$ kleiner als 1 ist, und sonst ist dieser Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1-e^{-2\pi i z(y-\frac{1}{2})}}{\pi z} - e^{-2\pi i z(y-\frac{1}{2})}\left(\frac{1}{\sin \pi z} - \frac{1}{\pi z}\right)\right|$$

$$\leqq \frac{\left|1-e^{-2\pi i z(y-\frac{1}{2})}\right|}{2\pi z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin \pi z} - \frac{1}{\pi z}\right)$$

$$< \frac{\sin\left(\pi z\left|y-\frac{1}{2}\right|\right)}{\pi z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin \pi z} - \operatorname{cotg} \pi z\right) \leqq \left|y-\frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi z}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Hiermit ist (21), also (4) vollständig bewiesen.

§ 5.

Es werde die rechte Seite von (3) mit $D(x, z, a, b)$ bezeichnet, so daß

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} D(x,z,a,b) &= \frac{i \pm 1}{\sqrt{2|x|}}\, e^{-\frac{\pi i z^2}{x}} \Bigg\{ -\sum_{n=xa+z}^{xb+z}{}' e^{\frac{\pi i}{x}(-n^2+2zn)} \\ &\qquad - \frac{i \mp 1}{\sqrt{2}} \sqrt{|x|} \sum_{n=a}^{b}{}' e^{\pi i x\left(n+\frac{z}{x}\right)^2} \Bigg\} \\ &= \frac{i \pm 1}{\sqrt{2|x|}}\, e^{-\frac{\pi i z^2}{x}} \Bigg\{ \sum_{n=-xa-z}^{-xb-z}{}' e^{\pi i\left(-\frac{n^2}{x} - \frac{2zn}{x}\right)} \\ &\qquad - \frac{i \mp 1}{\sqrt{2}} \sqrt{|x|} \sum_{n=a}^{b}{}' e^{\pi i x\left(n+\frac{z}{x}\right)^2} \Bigg\} \\ &= \frac{i \pm 1}{\sqrt{2|x|}}\, e^{-\frac{\pi i z^2}{x}}\, D\left(-\frac{1}{x}, -\frac{z}{x}, -xa-z, -xb-z\right) \end{aligned}\right.$$

ist.

Wegen (3) und (4) ist

$$(25)\qquad |D(x,z,a,b)| < \frac{1}{\sqrt{|x|}} + 2 + 4|x|;$$

wegen (24) und (25) $\left(\text{mit } -\frac{1}{x} \text{ statt } x\right)$ ist

$$(26)\quad |D(x,z,a,b)| < \frac{1}{\sqrt{|x|}}\left(\sqrt{|x|} + 2 + \frac{4}{|x|}\right) = \frac{2}{\sqrt{|x|}} + 1 + \frac{4}{|x|^{\frac{3}{2}}},$$

und aus (25) und (26) folgt

$$(27)\qquad |D(x,z,a,b)| < \frac{7}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right).$$

Es werde $b - a = c$ gesetzt. Wir setzen in diesem Paragraphen weiter c, cx und $\frac{1}{2}cx^2 + cz$, also auch

$$\frac{1}{2}cx^2 - cz = c \cdot cx - \left(\frac{1}{2}cx^2 + cz\right)$$

ganz voraus. Falls n und h ganze Zahlen bezeichnen, sind

$$\left\{\frac{1}{2}x(n+hc)^2 + z(n+hc)\right\} - \left\{\frac{1}{2}xn^2 + zn\right\}$$

und

$$\frac{1}{2x}(n - z + hcx)^2 - \frac{1}{2x}(n-z)^2$$

ganz; es ist also

$$e^{\pi i(x(n+hc)^2 + 2z(n+hc))} = e^{\pi i(xn^2 + 2zn)} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z+hcx)^2} = e^{-\frac{\pi i}{x}(n-z)^2}.$$

Hieraus folgt

$$D(x, z, a + hc, b + hc) = D(x, z, a, b),$$

so daß für jedes positive ganze H

$$H\,D(x, z, a, b) = \sum_{h=0}^{H-1} D(x, z, a + hc, b + hc) = D(x, z, a, a + Hc)$$

ist. Da nach (27) die letzte Seite absolut genommen kleiner ist als eine von H unabhängige Zahl, ist $D(x, z, a, b) = 0$, womit (5) bewiesen ist.

§ 6.

In diesem Paragraphen schließlich werden wir beweisen, daß die Hardy-Littlewoodschen Ungleichungen (6) äquivalent sind mit der Beziehung

$$(28) \qquad |D(x, z, a, b)| < K_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right),$$

wo K_1 eine Konstante bezeichnet. In diesem Paragraphen bezeichne n eine positive Zahl, θ eine Zahl, welche absolut ≤ 1 ist. Es werde gesetzt

$$\left.\begin{aligned} s_n^\lambda(x,\theta) + i\,\sigma_n^\lambda(x,\theta) &= t_n^\lambda(x,\theta) \\ t_n^\lambda(x,\theta) - \frac{i+1}{\sqrt{2x}}\, e^{-\frac{\pi i \theta^2}{x}}\, t_{nx}^{6-\lambda}\left(-\frac{1}{x}, \frac{\theta}{x}\right) &= T_n^\lambda(x,\theta) \end{aligned}\right\} \lambda = 2, 3 \text{ und } 4,$$

wo x eine positive Zahl bezeichnet.

Die Hardy-Littlewoodschen Ungleichungen (6) sind äquivalent mit dem Satze, daß es, falls $0 < x \leq 1$ ist, eine Konstante K_2 gibt mit der Eigenschaft

$$(29) \qquad |T_n^\lambda(x,\theta)| < \frac{K_2}{\sqrt{x}} \qquad (\lambda = 2, 3 \text{ und } 4);$$

denn aus (6) folgt (29) mit $K_2 = 2K$, und aus (29) folgt (6) mit $K = K_2$ wegen

$$2 s_n^\lambda(x, \theta) = t_n^\lambda(x, \theta) + t_n^\lambda(x, -\theta); \qquad 2 i \sigma_n^\lambda(x, \theta) = t_n^\lambda(x, \theta) - t_n^\lambda(x, -\theta).$$

Wie man leicht prüft, ist

$$(30) \quad \left\{\begin{aligned}
&T_n^2(x,\theta) - e^{\pi i\left(\frac{x}{4}-\theta\right)} D\left(x, \theta - \tfrac{1}{2}x, 0, n\right)\\
&= \frac{i+1}{\sqrt{2x}}\left\{\sum_{\nu=nx}^{nx+\theta-\frac{1}{2}x}{}' (-1)^\nu e^{-\frac{\pi i}{x}(\nu-\theta)^2} - \sum_{\nu=0}^{\theta-\frac{1}{2}x}{}' (-1)^\nu e^{-\frac{\pi i}{x}(\nu-\theta)^2}\right\},\\
&T_n^3(x,\theta) - D(x, \theta, 0, n)\\
&= \frac{i+1}{\sqrt{2x}}\left\{\sum_{\nu=nx}^{nx+\theta}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(\nu-\theta)^2} - \sum_{\nu=0}^{\theta}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}(\nu-\theta)^2}\right\},\\
&T_n^4(x,\theta) - D\left(x, \theta + \tfrac{1}{2}, 0, n\right)\\
&= \frac{i+1}{\sqrt{2x}}\left\{\sum_{\nu=nx}^{nx+\theta+\frac{1}{2}}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}\left(\nu-\theta-\frac{1}{2}\right)^2} - \sum_{\nu=0}^{\theta+\frac{1}{2}}{}' e^{-\frac{\pi i}{x}\left(\nu-\theta-\frac{1}{2}\right)^2}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Wegen $|\theta| \leqq 1$ und $0 < x \leqq 1$ enthält die rechte Seite jeder Beziehung (30) höchstens vier Glieder, so daß jede dieser Seiten absolut $\leqq \frac{4}{\sqrt{x}}$ ist. Aus (30) und (28) geht hervor

$$|T_n^\lambda(x, \theta)| < K_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{4}{\sqrt{x}} \leqq \frac{2K_1 + 4}{\sqrt{x}},$$

so daß (29) mit $K_2 = 2K_1 + 4$ aus (28) folgt.

Umgekehrt folgt aus der zweiten Beziehung von (30) und aus (29) mit $\lambda = 3$

$$(31) \qquad |D(x, \theta, 0, n)| < \frac{K_2 + 4}{\sqrt{x}}.$$

Hierin ist $0 < x \leqq 1$ vorausgesetzt, aber aus (31) folgt, falls x eine beliebige Zahl $\geqq -1$ und $\leqq 1$ ungleich Null bezeichnet,

$$|D(x, \theta, 0, n)| = |D(-x, -\theta, 0, n)| < \frac{K_2 + 4}{\sqrt{|x|}},$$

$$|D(x, \theta, 0, -n)| = |D(x, -\theta, 0, n)| < \frac{K_2 + 4}{\sqrt{|x|}},$$

also

$$|D(x, \theta, a, b)| \leqq |D(x, \theta, 0, a)| + |D(x, \theta, 0, b)| < \frac{2K_2 + 8}{\sqrt{|x|}}.$$

Hieraus ergibt sich, da bei geeignet gewähltem ganzem h $|z+hx| \leqq 1$ ist,

$$(32)\qquad |D(x, z, a, b)| = |D(x, z + hx, a - h, b - h)| < \frac{2K_2+8}{\sqrt{|x|}},$$

also nach (24) und (32)

$$(33)\qquad \left|D\left(-\frac{1}{x}, z, a, b\right)\right| < \sqrt{|x|}\cdot\frac{2K_2+8}{\sqrt{|x|}} = 2K_2 + 8.$$

Aus (32) und (33) folgt (28) mit $K_1 = 2K_2 + 8$.

Utrecht, den 10. Januar 1922.

(Eingegangen am 12. 1. 1922.)

Über Kongruenzbedingungen der rationalen Lösbarkeit von algebraischen Gleichungen.

Von

Gustav Rados in Budapest.

Sind alle Wurzeln der ganzzahligen algebraischen Gleichung

$$(1) \qquad F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

rational, so hat die Kongruenz

$$(2) \qquad F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv 0 \pmod p$$

für jeden Primzahl-Modul genau n Wurzeln.

Kann diese triviale Behauptung umgekehrt werden? Oder folgt schon aus der Zerlegbarkeit von $F(x)$ für jeden Primzahl-Modul p in n lineare Faktoren auch die Zerlegbarkeit von $F(x)$ in n lineare Faktoren im natürlichen Rationalitätsbereiche?

Im nachfolgenden soll diese Frage in bejahendem Sinne beantwortet werden. Es ist dies um so bemerkenswerter, als Herr D. Hilbert in seiner Arbeit „Über Diophantische Gleichungen" (Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1897, S. 53) als erster auf die interessante Tatsache hingewiesen hat, daß die Zerlegbarkeit eines Polynoms in bezug auf alle Primzahl-Moduln noch nicht die Reduzibilität desselben im algebraischen Sinne des Wortes zur Folge hat. Es gelang ihm nämlich von dem im natürlichen Rationalitätsbereiche irreduziblen Polynom

$$F(x) \equiv x^4 + 13 x^2 + 81$$

$$\equiv \left(x + \frac{5^{\frac{1}{2}} + 31^{\frac{1}{2}} i}{2}\right)\left(x + \frac{5^{\frac{1}{2}} - 31^{\frac{1}{2}} i}{2}\right)\left(x + \frac{-5^{\frac{1}{2}} + 31^{\frac{1}{2}} i}{2}\right)\left(x + \frac{-5^{\frac{1}{2}} - 31^{\frac{1}{2}} i}{2}\right)$$

nachzuweisen, daß dieses für jeden Primzahl-Modul in zwei ganzzahlige quadratische Faktoren zerfällt. Die Zerlegbarkeit für jeden Primzahl-Modul hat demnach im allgemeinen die algebraische Zerlegbarkeit noch nicht zur Folge. In dem Grenzfalle jedoch, in welchem die Spaltung des

Polynoms für alle Primzahl-Moduln in Faktoren ersten Grades nachgewiesen werden kann, ist dies schon hinreichend dafür, daß dieses Polynom im natürlichen Rationalitätsbereiche auch im algebraischen Sinne in Faktoren ersten Grades zerfällt.

Polynome ersten und zweiten Grades.

Es sei die folgende vereinfachende Bemerkung vorangesetzt:

Hat die Kongruenz

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv 0 \pmod{p}$$

für jeden Primzahl-Modul n Wurzeln, so ist $a_0 = \pm 1$.

Wäre nämlich a_0 von ± 1 verschieden, so besäße a_0 wenigstens einen Primteiler q und für diesen hätte die Kongruenz

$$F(x) \equiv 0 \pmod{q}$$

entgegen der gemachten Voraussetzung höchstens $n-1$ Wurzeln.

Für Polynome ersten Grades ist durch diese Bemerkung der Beweis unserer Behauptung erledigt.

Es sei nun die Kongruenz

$$F(x) \equiv x^2 + a_1 x + a_2 \equiv 0 \pmod{p}$$

gegeben, die für jeden Primzahl-Modul p zwei Wurzeln besitzt, alsdann kann dies auch von der Kongruenz

$$(2x + a_1)^2 \equiv a_1^2 - 4a_2 \equiv D \pmod{p}$$

oder von der Kongruenz

$$y^2 \equiv D \pmod{p}$$

behauptet werden. Demnach besteht für alle ungeraden zu D teilerfremden Primzahlen p die Gleichung

$$\left(\frac{D}{p}\right) \equiv D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \tag{1}$$

Ist nun D von ± 1 verschieden, so sei

$$D = \pm 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_s^{\beta_s}$$

$$[p_i \equiv q_j \equiv 1 \pmod{2};\quad i = 1, 2, \ldots, r;\quad j = 1, 2, \ldots, s]$$

die Zerlegung von D in Primfaktoren, worin die Exponenten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

gerade, die Exponenten

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$$

ungerade sein mögen. Es kann nun leicht nachgewiesen werden, daß die Annahme solcher ungerader Exponenten zu einem Widerspruch führt.

Da nämlich

$$\left(\frac{q_k^{\beta_k}}{p}\right)=\left(\frac{q_k}{p}\right)^{\beta_k}=\left(\frac{q_k}{p}\right), \qquad \left(\frac{p_i^{\alpha_i}}{p}\right)=\left(\frac{p_i}{p}\right)^{\alpha_i}=1$$
$$(k=1,2,\ldots,s) \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

ist, so folgte aus (1) das Bestehen der Gleichung

$$(2)\qquad \left(\frac{D}{p}\right)=(-1)^{\varepsilon\frac{p^2-1}{8}+\varepsilon'\frac{p-1}{2}}\left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_s}{p}\right)=1$$

für alle zu D teilerfremden ungeraden Primzahlen p, wo ε für gerade α den Wert Null, für ungerade α den Wert Eins hat, ferner für $\varepsilon'=0,1$ zu setzen ist, je nachdem D positiv oder negativ ist. Es kann nun leicht die Existenz von unendlich vielen ungeraden und zu D teilerfremden Primzahlen p' nachgewiesen werden, für die die Gleichung (2) nicht erfüllt ist. Es kann nämlich die ungerade Primzahl p' so bestimmt werden, daß

$$(-1)^{\varepsilon\frac{p'^2-1}{8}+\varepsilon'\frac{p'-1}{2}}=+1,\quad \left(\frac{q_1}{p'}\right)=-1,\quad \left(\frac{q_2}{p'}\right)=\left(\frac{q_3}{p'}\right)=\cdots=\left(\frac{q_s}{p'}\right)=+1$$

und somit

$$\left(\frac{D}{p'}\right)=-1$$

sei.

Es bestehen nämlich die Gleichungen:

$$(-1)^{\varepsilon\frac{p'^2-1}{8}+\varepsilon'\frac{p'-1}{2}}=+1$$
$$\left(\frac{q_1}{p'}\right)=\left(\frac{p'}{q_1}\right)=-1$$
$$\left(\frac{q_k}{p'}\right)=\left(\frac{p'}{q_k}\right)=+1 \qquad (k=2,3,\ldots,s),$$

falls die ungerade Primzahl p' das System folgender Kongruenzen befriedigt:

$$(3)\quad x\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8),\quad x\equiv\varrho_1\ (\mathrm{mod}\ q_1),\quad x\equiv\varrho_2\ (\mathrm{mod}\ q_2),\ \ldots,\ x\equiv\varrho_s\ (\mathrm{mod}\ q_s),$$

wobei ϱ_1 irgendein quadratischer Nichtrest von q_1, $\varrho_2, \varrho_3, \ldots, \varrho_s$ aber irgendwelche quadratische Reste der resp. Primzahlen $q_2, q_3, \ldots, q_s$ sind.

Die Lösungen des Systems (3) ergeben sich aus der Formel

$$(4)\qquad x=(q_1 q_2\cdots q_s)^4+\sum_{i=1}^{s}(8q_1\cdots q_{i-1}\,q_{i+1}\cdots q_s)^{q_i-1}\varrho_i$$
$$+(8q_1, q_2, \ldots, q_s)\,u.$$

Die sich aus (4) ergebenden Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied

$$(q_1 q_2 \ldots q_s)^4 + \sum_{i=}^{s} (8 q_1 \ldots q_{i-1} q_{i+1} \ldots q_s)^{q_i - 1} \varrho_i$$

zur Differenz $8 q_1 q_2 \ldots q_s$ teilerfremd ist, demnach sind in dieser Progression unendlich viele Primzahlen enthalten. Ist p' eine derselben, die größer als der größte Primteiler von D ist, so ist für diese

$$\left(\frac{D}{p'}\right) = -1.$$

Demnach gibt es in der Primfaktoren-Zerlegung von D keine in ungerader Potenz auftretenden ungeraden Primzahlen.

Nach (2) ist nun für alle in D nicht enthaltenen Primzahlen der Form $8k+5$

$$\left(\frac{D}{p'}\right) = (-1)^{\varepsilon} = 1,$$

also $\varepsilon = 0$, d. h. auch die Primzahl 2 geht in D zu gerader Potenz auf.

Es ist demnach

$$D = \pm \left(2^{\frac{\alpha}{2}} p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} p_2^{\frac{\alpha_2}{2}} \ldots p_r^{\frac{\alpha_r}{2}}\right)^2 = \pm \Delta^2.$$

Nun kann leicht gezeigt werden, daß von den beiden Vorzeichen nur das positive zulässig ist. Denn angenommen, daß

$$D = -\Delta^2$$

sei, würde für jede Primzahl p'' von der Form $4k+3$, die in D nicht enthalten ist, im Gegensatze zur Gleichung (1)

$$\left(\frac{D}{p''}\right) = \left(\frac{-1}{p''}\right)\left(\frac{\Delta^2}{p''}\right) = -1$$

sein.

Es ist daher

$$D = +\Delta^2,$$

folglich

$$F(x) = \left(x - \frac{-a_1 + \Delta}{2}\right)\left(x - \frac{-a_1 - \Delta}{2}\right)$$

und somit $F(x)$ als das Produkt zweier ganzzahliger Faktoren ersten Grades dargestellt.

Polynome n-ten Grades.

Es soll nun ganz allgemein der nachfolgende Satz bewiesen werden:

Hat die ganzzahlige Kongruenz

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv 0 \pmod{p}$$

für jeden Primzahl-Modul genau n Wurzeln, so sind auch alle Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} x + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

ganze rationale Zahlen.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar aus dem nachfolgenden merkwürdigen Theorem, das L. Kronecker in seiner Abhandlung „Über die Irreduzibilität von Gleichungen“ (Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1878, S. 95) mitgeteilt hat. Dasselbe lautet:

„*Ist $F(x)$ eine ganzzahlige Funktion von x und bedeutet ν_p in der auf alle Primzahlen p ausgedehnten Summe*

$$\sum \nu_p p^{-1-w}$$

die Anzahl der (gleichen oder verschiedenen) Wurzeln der Kongruenz $F(x) \equiv 0 \pmod p$, so wird der Grenzwert jener Reihe für unendlich kleine positive Werte von w proportional $\log \frac{1}{w}$ und zwar gleich $\log \frac{1}{w}$ multipliziert mit der Anzahl der irreduziblen Faktoren von $F(x)$.“

Dieser Satz kann auch durch die folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\text{(I)} \qquad \lim_{w=0} \frac{\sum \nu_p p^{-1-w}}{\log \frac{1}{w}} = \nu,$$

wobei durch ν die Anzahl der irreduziblen Faktoren von $F(x)$ im natürlichen Rationalitätsbereich bezeichnet wurde.

Wird nun diese Formel (I) auf das Polynom ersten Grades

$$\Phi(x) \equiv x + k$$

angewendet, so ist $\nu = 1$, und da die Kongruenz

$$\Phi(x) \equiv x + k \equiv 0 \pmod p)$$

für jeden Primzahl-Modul p genau eine Wurzel hat, so ist für jede Primzahl p $\nu_p = 1$, somit ergibt die Formel (I) die Gleichung

$$\text{(II)} \qquad \lim_{w=0} \frac{\sum p^{-1-w}}{\log \frac{1}{w}} = 1.$$

Besitzt nun die Kongruenz

$$F(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv 0 \pmod p)$$

für jeden Primzahl-Modul p genau n Wurzeln, so ist $\nu_p = n$ für jede Primzahl p.

Die Formel (I) gestaltet sich in diesem Falle daher folgendermaßen

$$n\left[\lim_{w=0}\frac{\sum p^{-1-w}}{\log\frac{1}{w}}\right]=\nu,$$

und da der Ausdruck in der Klammer wegen (II) gleich 1 ist, so ergibt sich schließlich

$$\nu=n,$$

das heißt, daß das Polynom n-ten Grades $F(x)$ im natürlichen Rationalitätsbereich genau n irreduzible Faktoren besitzt; dieselben sind daher ersten Grades und überdies ganzzahlig, da der Koeffizient von x^n gleich ± 1 und die anderen Koeffizienten von $F(x)$ ganze rationale Zahlen sind.

Schließlich möge hier noch eines Satzes gedacht werden, der sich aus Kroneckers Theorem unmittelbar ergibt. Dieser Satz lautet:

Ist $F(x)$ irreduzibel, so gibt es stets unendlich viele Primzahlen p von der Beschaffenheit, daß die Kongruenz

$$F(x)\equiv 0 \pmod p$$

wenigstens eine reelle Wurzel besitzt.

Wäre nämlich ν_p nur für eine endliche Anzahl von Primzahlen p von Null verschieden, so würde im Widerspruch zu Kroneckers Satz

$$\lim_{w=0}\frac{\sum \nu_p\, p^{-1-w}}{\log\frac{1}{w}}=0$$

sein.

Budapest, den 8. Januar 1922.

(Eingegangen am 16. 1. 1922.)

Einige elementare Funktionen, welche sich in eine trigonometrische, aber nicht Fouriersche Reihe entwickeln lassen.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

§ 1.

Während die Begriffe „trigonometrische" und „Fouriersche" Reihe früher gleichbedeutend waren, faßt man heute nach dem Vorgang des Herrn Lebesgue den Begriff der Fourierschen Reihe wesentlich enger. Eine trigonometrische Reihe

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)$$

heißt Fouriersche Reihe der Funktion $f(x)$, wenn $f(x)$ von 0 bis 2π im Lebesgueschen Sinne integrierbar[1]) ist, und die Koeffizienten a_n, b_n die folgenden Werte haben:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos n x\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin n x\, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Lebesguesche Integrierbarkeit involviert immer auch die absolute Integrierbarkeit. Ist $f(x)$ nicht mehr im Lebesgueschen Sinne integrierbar, so kann es immerhin sein, daß die obigen Integrale in einem andern, etwa im Harnackschen, Sinne existieren; dann bezeichnet Herr Lebesgue die Reihe als „verallgemeinerte Fouriersche Reihe".

[1]) „Summierbar" nach Lebesguescher Terminologie, falls $f(x)$ nicht beschränkt ist.

Für eine trigonometrische nicht Fouriersche Reihe hat Herr Fatou das Beispiel angegeben[2]):

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}.$$

Obwohl diese Reihe an Einfachheit nichts zu wünschen läßt, so ist doch $f(x)$ keine elementare Funktion, und außerdem sagt Herr Fatou zum Beweis nur: „Man sieht leicht, daß das unbestimmte Integral

$$\int f(x)dx=-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{n\log n}$$

für $x\to 0$ keinem endlichen Grenzwert zustrebt". Ob man das wirklich ganz so leicht sieht, möchte ich bezweifeln. Herr Lebesgue, der das Fatousche Beispiel übernommen hat, gibt einen andern Beweis, der aber die Möglichkeit offen läßt, daß die Reihe vielleicht eine „verallgemeinerte" Fouriersche ist[3]). Daher dürften die folgenden elementaren Beispiele vielleicht nicht ohne Interesse sein; auch auf die Fatousche Reihe wird nebenbei einiges Licht fallen.

§ 2.

Hilfssatz. *Die Koeffizienten c_n der Potenzreihe*

$$\frac{-z}{(1-z)\log(1-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

sind positiv und nehmen monoton nach Null ab.

Beweis. Zur Berechnung von c_n hat man die Identität

$$1+z+z^2+\ldots=(c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{3}+\ldots\right),$$

aus der sich die Rekursionsformel ergibt:

$$(1)\qquad \frac{c_n}{1}+\frac{c_{n-1}}{2}+\ldots+\frac{c_0}{n+1}=1\qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Man berechnet hieraus leicht:

$$c_0=1,\quad c_1=\frac{1}{2},\quad c_2=\frac{5}{12},\quad c_3=\frac{3}{8},\quad c_4=\frac{251}{720},\quad c_5=\frac{95}{288},\ldots$$

Setzt man in (1) $n+1$ an Stelle von n und subtrahiert die entstehende Gleichung von (1), so folgt:

$$(2)\qquad c_{n+1}=\left(1-\frac{1}{2}\right)c_n+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)c_{n-1}+\ldots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)c_0$$
$$(n=0,1,2,\ldots).$$

[2]) Fatou, Sur le développement en série trigonométrique des fonctions non intégrables. Comptes rendus hebd. de l'Acad. des sciences 142 (1906), S. 765–767.

[3]) H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques. Paris 1906. S. 124.

Daraus schließt man, da c_0 positiv ist, sofort durch vollständige Induktion, daß alle c_n positiv sind. Gleichung (2) läßt sich auch in der Form schreiben:

$$c_n - c_{n+1} + \frac{1}{2}(c_{n-1} - c_n) + \ldots + \frac{1}{n+1}(c_0 - c_1) = \frac{c_0}{n+2},$$

oder, indem man $c_n - c_{n+1} = d_n$ setzt,

$$(3) \qquad d_n + \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{3} d_{n-2} + \ldots + \frac{1}{n+1} d_0 = \frac{c_0}{n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Schreibt man hier wieder $n+1$ statt n und subtrahiert von der entstehenden Gleichung die mit $\frac{n+2}{n+3}$ multiplizierte Gleichung (3), so ergibt sich:

$$d_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{2}\right) d_n + \left(\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{3}\right) d_{n-1} + \ldots + \left(\frac{1}{n+1}\frac{n+2}{n+3} - \frac{1}{n+2}\right) d_0.$$

Die Klammergrößen sind positiv, und da auch $d_0 = c_0 - c_1 = \frac{1}{2}$ positiv ist, so schließt man wieder sofort durch vollständige Induktion, daß alle d_n positiv sind, also:

$$c_n - c_{n+1} = d_n > 0 \quad \text{oder} \quad c_n > c_{n+1}.$$

Nachdem die c_n somit als positiv und monoton abnehmend erkannt sind, folgt aus (1):

$$c_n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) < 1,$$

also gewiß $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$, womit der Beweis des Hilfssatzes beendet ist.

§ 3.

Aus dem Hilfssatz folgt[4]), daß die dortige Reihe auf dem ganzen Einheitskreis außer im Punkt $z = 1$ konvergiert, und zwar gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Bogen, der den Punkt 1 nicht enthält. Dasselbe gilt daher auch von der Reihe

$$\frac{-z^{p+1}}{(1-z)\log(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{n+p},$$

wenn p irgendeine ganze Zahl bedeutet. Setzt man also $z = e^{ix}$, so erhält man:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i(n+p)x} = \frac{-e^{i(p+1)x}}{(1-e^{ix})\log(1-e^{ix})} = \frac{-i e^{i(p+\frac{1}{2})x}}{2\sin\frac{x}{2}\left[\log 2\sin\frac{x}{2} + i\,\frac{x-\pi}{2}\right]},$$

[4]) Wie man bekanntlich durch Abelsche Summation beweist. Man vgl. z. B. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen (Berlin, Springer, 1922) S. 308, wo die Konvergenz des reellen und imaginären Teiles getrennt gezeigt wird.

wobei der $\log 2 \sin \frac{x}{2}$ reell ist, wenn x zwischen 0 und 2π liegt. Durch Trennung des reellen vom imaginären Teil ergibt sich:

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(n+p)x = \frac{\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x \cdot \log 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x-\pi}{2}\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}\left[\left(\log 2\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right]} \qquad (0 < x < 2\pi),$$

$$(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(n+p)x = \frac{-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x \cdot \log 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x-\pi}{2}\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}\left[\left(\log 2\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right]} \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Von diesen zwei trigonometrischen Reihen ist die erste zugleich die Fourierreihe der durch sie dargestellten Funktion, was uns hier nicht interessiert; *die zweite aber ist nicht die Fourierreihe, nicht einmal verallgemeinerte Fourierreihe.* Denn sonst müßte z. B. ihr konstantes Glied, also 0, gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x \cdot \log 2\sin\frac{x}{2} - \frac{x-\pi}{2}\sin\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}\left[\left(\log 2\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right]}\, dx$$

sein. Aber dieses Integral existiert in keinem Sinne, da ja offenbar

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{\pi} = \infty, \qquad \lim_{\delta \to +0} \int_{\pi}^{2\pi-\delta} = -\infty$$

ist.

Man kann nun leicht noch etwas einfachere Funktionen angeben, die dieselbe Eigentümlichkeit haben. Ersetzt man p in (5) durch $-p-1$ und addiert die entstehende Formel zu (5), so erhält man:

$$(6) \quad \frac{-\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x \cdot \log 2\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\left[\left(\log 2\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2\right]} = \sum (c_{\nu-p} + c_{\nu+p+1}) \sin \nu x \quad (0 < x < 2\pi),$$

wobei ν alle ganzen Zahlen durchläuft, und die c mit negativem Index verschwinden. Also z. B. für $p = 0$:

$$(7) \quad \frac{-\operatorname{cotg}\frac{x}{2} \cdot \log 2\sin\frac{x}{2}}{\left(\log 2\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-\pi}{2}\right)^2} = (-c_0 + c_1 + c_2)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(c_n + c_{n+1})\sin nx \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Eine noch einfachere Funktion ist

$$(8) \qquad \frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}\cdot\log a\sin\frac{x}{2}} \qquad (0<a<1);$$

und also insbesondere für $p=0$:

$$(9) \qquad \frac{\operatorname{cotg}\frac{x}{2}}{\log a\sin\frac{x}{2}} \qquad (0<a<1).$$

Denn die Summe der Funktionen (6) und (8) ist von 0 bis 2π absolut integrierbar[5]) und ist für $0<x<2\pi$ gleich ihrer Fourierschen Reihe (weil sie z. B. einen endlichen Differentialquotienten hat). Durch Subtraktion ergibt sich dann für die Funktion (8) (also speziell auch für (9)) eine trigonometrische Reihe, die wieder nicht Fourierreihe sein kann, auch nicht „verallgemeinerte“ Fourierreihe.

§ 4.

Es ist für $|z|<1$

$$\frac{-z}{(1-z)\log(1-z)}=\int_0^1(1-z)^{-\varrho}\,d\varrho=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\varrho+n-1}{n}z^n\,d\varrho.$$

Daher, wenn c_n die frühere Bedeutung hat:

$$c_n=\int_0^1\binom{\varrho+n-1}{n}d\varrho.$$

Hieraus ließe sich, wie nebenbei bemerkt sei, auch leicht der Hilfssatz des § 2 neu beweisen.

Nun ist für $0\leqq\varrho\leqq 1$

$$\binom{\varrho+n-1}{n}=n^{\varrho-1}\left(Fc(\varrho)+\frac{\psi_n(\varrho)}{n}\right),$$

wo $Fc(\varrho)$ die reziproke Gammafunktion bedeutet, und $\psi_n(\varrho)$ unter einer von n und ϱ unabhängigen Schranke bleibt[6]); also ist

$$c_n=\int_0^1\binom{\varrho+n-1}{n}d\varrho=\int_0^1 Fc(\varrho)\,n^{\varrho-1}\,d\varrho+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

---

[5]) Die Einschränkung $a<1$ bei den Funktionen (8) und (9) ist notwendig, weil sonst der Nenner $\log a\sin\frac{x}{2}$ *im Innern* des Intervalles $(0, 2\pi)$ zwei Nullstellen hätte, über welche die Funktion nicht hinweg integriert werden könnte.

[6]) Vgl. meine Arbeit: Über das Verhalten von $f^{(\nu)}(x)$ für $\lim \nu=\infty$, wenn $f(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt. Sitzungsberichte der bayr. Akad. d. Wissenschaften; math.-phys. Klasse 1913, S. 355—382, speziell S. 358.

und durch zweimalige partielle Integration:

$$c_n = \frac{1}{\log n} - \frac{Fc'(1)}{(\log n)^2} + \frac{Fc'(0)}{n(\log n)^2} + \frac{1}{(\log n)^2}\int_0^1 Fc''(\varrho)n^{\varrho-1}d\varrho + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{\log n} + O\left(\frac{1}{(\log n)^2}\right).$$

Daher wird die trigonometrische Reihe

$$(10) \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{\log n}\right)\sin n x = F(x),$$

die im Intervall $(\varepsilon, 2\pi - \delta)$ gleichmäßig konvergiert, die Eigenschaft haben, daß ihr Integral

$$\int_{\varepsilon}^{2\pi-\delta} F(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{\log n}\right)\frac{\cos n\varepsilon - \cos n\delta}{n}$$

sich der Grenze 0 nähert, wenn ε und δ unabhängig voneinander nach 0 wandern. Ebenso ist

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \delta\to+0}} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\delta} F(x)\cos n x\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \delta\to+0}} \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{2\pi-\delta} F(x)\sin n x\,dx = \begin{cases} c_n - \frac{1}{\log n} \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots \\ 0 \text{ für } n = 1, \end{cases}$$

so daß die Reihe (10) eine (verallgemeinerte) Fouriersche Reihe ist. Da wir aber sahen, daß

$$\sum c_n \sin n x$$

keine solche ist, so schließt man, daß die Fatousche Reihe

$$\sum \frac{1}{\log n}\sin n x$$

auch keine sein kann.

(Eingegangen am 19. 2. 1922.)

Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen.

Von

G. Szegö in Berlin.

Wir betrachten eine geschlossene stetige Kurve C in der komplexen x-Ebene, die sich eventuell auch auf einen doppelt zu rechnenden Kurvenbogen reduzieren kann. Herr Faber hat die Polynome

$$T_n(x) = x^n + t_1^{(n)} x^{n-1} + \ldots + t_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

eingeführt, welche durch die Minimumeigenschaft ausgezeichnet sind, daß das Maximum von $|T_n(x)|$ auf der Kurve C kleiner ist, als das Maximum des absoluten Betrages von irgendeinem anderen Polynome n-ten Grades von der Form

$$A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$ [1])

Zu jeder Kurve C gehört eine Serie von Polynomen

$$T_0(x),\ T_1(x), \ldots,\ T_n(x), \ldots,$$

die durch diese Eigenschaft definiert sind. Sie wurden von Herrn Faber als die zu der Kurve C gehörigen Tschebyscheffschen Polynome bezeichnet. Es sei

$$\operatorname*{Max}_{(C)} |T_n(x)| = \mu_n,$$

dann lautet der Satz von Faber[2])

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\mu_n} = \gamma, \tag{1}$$

wobei γ eine durch C vollständig bestimmte positive Zahl bezeichnet, die

---

[1]) G. Faber, a) Über Tschebyscheffsche Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik **150** (1919), S. 79-106]; b) Potentialtheorie und konforme Abbildung [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der bayerischen Akademie der Wissenschaften 1920, S. 49–64, vgl. insbes. § 3 (S. 55–56)].

[2]) A. a. O. [1]) b).

man folgendermaßen gewinnt: Man bilde das Äußere der Kurve C der x-Ebene konform und schlicht auf das Äußere eines Kreises mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ab; die Vergrößerung im unendlich fernen Punkt sei hierbei gleich 1. Dann ist der Radius dieses Kreises gleich γ.

Ist z. B. C der Einheitskreis, dann ist $\gamma = 1$. Ist C' eine Kurve, die gänzlich im Innern von C liegt, dann ist die zu C' gehörige Konstante $\gamma' < \gamma$. Für eine geradlinige Strecke von der Länge l ist $\gamma = \frac{l}{4}$ usf. Die Konstante γ ändert sich stetig mit der Kurve C.

Aus dem Faberschen Resultat (1) ergibt sich u. a., daß, wenn $\gamma < 1$ ist, Polynome von der Form

$$G_n(x) = x^n + g_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + g_n^{(n)}$$

existieren derart, daß (von einem gewissen n an) die Gleichungen gelten:

$$(2) \qquad |G_n(x)| < \vartheta^n.$$

Hierbei ist x eine beliebige Stelle auf der Kurve C; ϑ bezeichnet eine feste positive Zahl, die kleiner als 1 ist. Insbesondere gilt dies für Kurven C, die ganz im Einheitskreise liegen, ohne mit diesem zusammenzufallen. (Oder für Kurven, die sich von solchen genügend wenig unterscheiden.) Aus (1) ergibt sich übrigens leicht, daß die Bedingung $\gamma < 1$ für die Existenz solcher Polynome $G_n(x)$ auch notwendig ist.

Im folgenden wird hauptsächlich ein spezieller Typus von solchen Kurven betrachtet, für welche man übrigens die Existenz der Polynome $G_n(x)$ auch elementar (d. h. ohne die Benützung von Faberschen Sätzen) beweisen kann[3]). Eine solche Kurve $C(\delta)$ definiere ich folgendermaßen: Sie besteht aus den beiden Kreisbögen

$$|x| = \frac{1}{R}, \qquad \varphi_1 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \varphi_2,$$

$$|x| = \frac{1}{1-\delta}, \qquad \varphi_2 \leqq \operatorname{arc} x \leqq \varphi_1 + 2\pi$$

und aus den beiden geradlinigen Strecken

$$\frac{1}{R} \leqq |x| \leqq \frac{1}{1-\delta}, \qquad \operatorname{arc} x = \varphi_1,$$

$$\frac{1}{R} \leqq |x| \leqq \frac{1}{1-\delta}, \qquad \operatorname{arc} x = \varphi_2.$$

(Fig. 1.) Hierbei sind $R > 1$, $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ feste Zahlen und $\delta > 0$. Wird δ genügend klein gewählt, so ist $C(\delta)$ offenbar von der obigen Beschaffenheit. Man kann also Polynome $G_n(x)$ angeben, die die obige Ungleichung (2) erfüllen, ***wobei ϑ von δ unabhängig ist.***

---

[3]) Vgl. a. a. O. [4]).

In der vorliegenden Arbeit will ich mit Hilfe der zuletzt definierten Polynome $G_n(x)$ oder anderer Polynome von verwandter Eigenschaft einige Sätze über Potenzreihen beweisen. Es zeigt sich, daß diese Polynome ein brauchbares Hilfsmittel liefern, um die Nichtfortsetzbarkeit bzw. andere ähnliche Eigenschaften gewisser interessanter Klassen von Potenzreihen zu beweisen.

§ 1 enthält einen neuen Beweis des Hadamardschen Lückensatzes, bei welchem das Wesen unserer Methode besonders scharf hervortritt. In § 2 beweise ich einen Satz über Potenzreihen mit beschränkten Koeffizienten, von welchem ich in § 3 einige Anwendungen gebe. Unter anderem wird hier ein Satz bewiesen, der (abgesehen von der vorausgesetzten Beschränktheit der Koeffizienten) gleichzeitig den Fabryschen Lückensatz und einen von mir früher bewiesenen Satz über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten[4]) verallgemeinert. § 4 bringt einen neuen Beweis für einen von Pólya vermuteten und von Carlson bewiesenen Satz über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. In § 5 gebe ich einen neuen Beweis eines Ostrowskischen Satzes. Darauf folgt zum Schluß in § 6 eine kurze Bemerkung über Potenzreihen, deren geeignet gewählte Abschnitte über den Konvergenzkreis hinaus beschränkt bleiben (bzw. konvergieren).

Inhalt.

§ 1.

Neuer Beweis des Hadamardschen Lückensatzes.

Der Hadamardsche Lückensatz lautet:

Es sei

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu}$$

---

[4]) Vgl. meine Note: Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten (Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1922, S. 88–91).

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1 *und sei*

$$\liminf_{\nu\to\infty} \frac{m_\nu}{m_{\nu-1}} > 1,$$

dann ist sie nicht über den Einheitskreis fortsetzbar [5]).

Vorbemerkung. Man kann für alle ν

$$m_\nu - m_{\nu-1} > \varepsilon m_\nu \qquad (\varepsilon > 0)$$

setzen. Es genügt ferner zu beweisen, daß aus der vorausgesetzten Existenz einer regulären Stelle am Einheitskreise,

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} < 1$$

folgt.

Beweis. Es sei $f(z)$ regulär im Innern und auf der Kurve $\Gamma(\delta)$, bestehend aus den Kreisbögen

$$|z| = R, \qquad \varphi_1 \leqq \operatorname{arc} z \leqq \varphi_2,$$
$$|z| = 1-\delta, \qquad \varphi_2 \leqq \operatorname{arc} z \leqq \varphi_1 + 2\pi$$

und aus den geradlinigen Strecken

$$1-\delta \leqq |z| \leqq R, \qquad \operatorname{arc} z = \varphi_1,$$
$$1-\delta \leqq |z| \leqq R, \qquad \operatorname{arc} z = \varphi_2.$$

(Fig. 2.) Hierbei sind $R > 1$, $0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$ feste Zahlen und $\delta > 0$

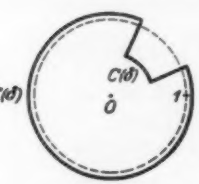

Fig. 1.

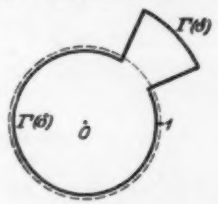

Fig. 2.

beliebig klein. Man wähle δ_0 so klein, daß die Kurve $\Gamma(\delta)$ für $\delta < \delta_0$ durch die Transformation

$$x = \frac{1}{z}$$

in eine Kurve $C(\delta)$ von der in der Einleitung definierten Beschaffenheit übergehe. Es gibt dann Polynome

$$G_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} + \frac{g_1^{(n)}}{z^{n-1}} + \ldots + g_n^{(n)},$$

[5]) Vgl. etwa E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. Berlin 1916 (J. Springer), S. 73.

für welche (von einem gewissen n an)

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \vartheta^n \tag{2'}$$

ist, wenn z auf $\Gamma(\delta)$ liegt. Hierbei bezeichnet ϑ eine feste (von δ unabhängige) positive Zahl, die kleiner als 1 ist.

Es gilt nun nach Cauchy die Formel

$$a_{m_\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} \frac{f(z)}{z^{m_\nu+1}}\,dz,$$

d. h. wegen des Vorhandenseins der Lücken

$$a_{m_\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} f(z)\left(\frac{1}{z^{m_\nu+1}} + \frac{\alpha}{z^{m_\nu}} + \frac{\beta}{z^{m_\nu-1}} + \dots + \frac{\lambda}{z^{m_{\nu-1}+2}}\right)dz,$$

wobei $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ beliebige Konstanten sind. Also

$$a_{m_\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} \frac{f(z)}{z^{m_{\nu-1}+2}}\,Q\left(\frac{1}{z}\right)dz,$$

wo $Q(x)$ ein beliebiges Polynom $(m_\nu - m_{\nu-1} - 1)$-ten Grades und mit dem höchsten Koeffizient 1 bezeichnet. Man setze nun

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = G_{m_\nu - m_{\nu-1}-1}\left(\frac{1}{z}\right),$$

dann folgt aus (2')

$$|a_{m_\nu}| < c_1 \frac{M(\delta)}{(1-\delta)^{m_{\nu-1}+2}}\,\vartheta^{m_\nu - m_{\nu-1}-1} < c_2 \frac{M(\delta)}{(1-\delta)^{m_\nu}}\,\vartheta^{\varepsilon m_\nu},\ ^{6})$$

wobei $M(\delta)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf $\Gamma(\delta)$ bezeichnet. Daraus folgert man

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} \leqq \frac{\vartheta^\varepsilon}{1-\delta},$$

und da dies für alle $\delta > 0$ gilt,

$$\limsup_{\nu\to\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} \leqq \vartheta^\varepsilon < 1;$$

w. z. b. w.

Bemerkung. *Ist*

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1,$$

dann folgt die Nichtfortsetzbarkeit der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu}$$

---

[6]) Im folgenden bezeichnen $c_1, c_2, c_3, \dots$ von ν- bzw. von n unabhängige positive Konstanten.

schon unter der Bedingung

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{m_\nu}{m_{\nu-1}} > 1. \text{ }^{7})$$

In der Tat genügt es, dann den obigen Schluß für geeignet gewählte ν zu wiederholen.

§ 2.

Über Potenzreihen mit beschränkten Koeffizienten.

In diesem Paragraphen beweise ich den folgenden

Satz 1. *Besitzt eine Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

mit beschränkten Koeffizienten wenigstens eine reguläre Stelle am Rande des Einheitskreises, dann haben ihre Koeffizienten die folgende Eigenschaft:

Zu jeder positiven Zahl ε gehören eine ganze Zahl q und Konstanten

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}$$

derart, daß

$$|\gamma_0 a_n + \gamma_1 a_{n+1} + \ldots + \gamma_{q-1} a_{n+q-1} + a_{n+q}| < \varepsilon \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wird. D. h. die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von

$$(1 + \gamma_{q-1} z + \ldots + \gamma_0 z^q) f(z)$$

sind vom q-ten an absolut kleiner als ε.

Es sei $f(z)$ regulär in einem Bereiche, begrenzt von einer solchen Kurve $\Gamma(\delta)$, wie sie im vorigen Paragraphen definiert wurden. Dann gibt es Polynome von der Form

$$Q\left(\frac{1}{z}\right) = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \ldots + \frac{\gamma_{q-1}}{z^{q-1}} + \frac{1}{z^q},$$

die absolut genommen beliebig klein sind, wenn z auf $\Gamma(\delta)$ liegt.

Der weitere Beweis von Satz 1 stützt sich auf den folgenden

Hilfssatz. *Es sei*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe mit beschränkten Koeffizienten und die durch sie dargestellte Funktion sei regulär in dem vorhin definierten Bereiche, dessen Begrenzung die Kurve $\Gamma(\delta)$ ist. Dann ist

---

[7]) Solche Potenzreihen werden in § 5 behandelt. Sie sind (wenn man beliebige Koeffizienten zuläßt) weder spezieller, noch allgemeiner, als die Potenzreihen, die der Fabryschen Lückenbedingung (vgl. § 3) genügen.

$$\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{z^{n+1}} = \frac{f(z)-(a_0+a_1 z+\ldots+a_{n-1}z^{n-1})}{z^{n+1}}$$

beschränkt für alle n und zwar gleichmäßig, wenn z auf $\Gamma(\delta)$ liegt.

Der Beweis dieses Hilfssatzes findet sich im wesentlichen bei Herrn M. Riesz[8]).

Satz 1 wird nun folgendermaßen bewiesen: Es sei in $\Gamma(\delta)$

$$\left|\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{z^{n+1}}\right| < M,$$

dann wähle man $Q\left(\frac{1}{z}\right)$ derart, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma(\delta)}\left|Q\left(\frac{1}{z}\right)\right||dz| < \frac{\varepsilon}{M}$$

sei. Man hat alsdann

$$\begin{aligned}\gamma_0 a_n + \gamma_1 a_{n+1} + \ldots + \gamma_{q-1}a_{n+q-1} + a_{n+q} \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\left(\gamma_0+\frac{\gamma_1}{z}+\ldots+\frac{\gamma_{q-1}}{z^{q-1}}+\frac{1}{z^q}\right)dz \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}Q\left(\frac{1}{z}\right)dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)}\frac{f(z)-s_{n-1}(z)}{z^{n+1}}Q\left(\frac{1}{z}\right)dz,\end{aligned}$$

d. h.

$$|\gamma_0 a_n + \gamma_1 a_{n+1} + \ldots + \gamma_{q-1}a_{n+q-1} + a_{n+q}| < \frac{M}{2\pi}\int\limits_{\Gamma(\delta)}\left|Q\left(\frac{1}{z}\right)\right||dz| < \varepsilon,$$

w. z. b. w.

§ 3.

Anwendungen.

1. In meiner Note „Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten"[9]) habe ich mit Hilfe von Satz 1 den folgenden Satz bewiesen:

Satz 2. *Es sei*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe, unter deren Koeffizienten nur endlich viele voneinander verschieden sind. Entweder stellt sie dann eine rationale Funktion dar, oder sie ist nicht über den Einheitskreis fortsetzbar.

---

[8]) Sätze über Potenzreihen [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 11 (1916), Nr. 12, S. 1—16], S. 3; vgl. auch: Neuer Beweis eines Fatouschen Satzes [Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse 1916, S. 62—65]. Siehe auch a. a. O. [5]), S. 66.

[9]) A. a. O. [4]).

Im ersten Falle sind die Koeffizienten a_n *(von einem gewissen an) periodisch, also* $f(z)$ *von der Form*

$$f(z) = \frac{P(z)}{1-z^m},$$

wobei $P(z)$ *ein Polynom bezeichnet.*

Der Beweis dieses Satzes stützte sich auf einen Hilfssatz, den ich hier gleich etwas allgemeiner formulieren will:

Hilfssatz. *Besitzt die Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

mit beschränkten Koeffizienten mindestens eine reguläre Stelle am Rande des Einheitskreises, dann haben ihre Koeffizienten a_n *folgende Eigenschaft:*

Es seien $d_1, d_2, \ldots, d_k$ *gewisse Zahlen; es gibt dann eine Zahl* q *von folgenden Eigenschaften:*

Sobald die Zahlen

$$a_\alpha, a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha+q-1}, a_{\alpha+q}; \qquad a_\beta, a_{\beta+1}, \ldots, a_{\beta+q-1}, a_{\beta+q}$$

zu den Zahlen d_ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$ *gehören und*

$$a_\alpha = a_\beta,\ a_{\alpha+1} = a_{\beta+1}, \ldots, a_{\alpha+q-1} = a_{\beta+q-1}$$

ist, dann hat man notwendigerweise $a_{\alpha+q} = a_{\beta+q}$.

In der Tat sei etwa $d > 0$ die kleinste Entfernung der Zahlen d_ν voneinander, d. h.

$$d = \operatorname{Min} |d_\mu - d_\nu|$$

für alle voneinander verschiedenen μ und ν $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k)$. Man wähle in Satz 1 (§ 2) $\varepsilon = \frac{d}{2}$, dann ist (wenn q und $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}$ die zu ε gehörigen Größen bezeichnen)

$$\begin{aligned} |a_{\alpha+q} - a_{\beta+q}| = |a_{\alpha+q} &+ \gamma_{q-1} a_{\alpha+q-1} + \ldots + \gamma_0 a_\alpha \\ &- (a_{\beta+q} + \gamma_{q-1} a_{\beta+q-1} + \ldots + \gamma_0 a_\beta)| < \varepsilon + \varepsilon = d, \end{aligned}$$

d. h. $a_{\alpha+q} = a_{\beta+q}$, w. z. b. w.

Auf Grund dieses Hilfssatzes will ich nun einen Satz beweisen, der Satz 2 als Spezialfall enthält.

2. Satz 3. *Es seien* $d_1, d_2, \ldots, d_k$ *gewisse* k *Zahlen. Man bezeichne mit* $N(m)$ *die Anzahl der Koeffizienten* a_n *einer Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

mit beschränkten Koeffizienten, für welche $n \leqq m$ *ist und die von sämtlichen* d_ν $(1 \leqq \nu \leqq k)$ *verschieden sind. Es sei ferner*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{N(m)}{m} = 0.$$

Dann stellt diese Potenzreihe eine eindeutige Funktion dar, deren Existenzbereich durch einen Kreis $|z| = r \geqq 1$ *begrenzt ist; die singulären Punkte im Existenzbereiche, wenn solche überhaupt vorhanden sind, sind einfache Pole, die in Einheitswurzeln liegen. Der äußerste Fall* $r = \infty$ *ist so zu verstehen, daß die Funktion meromorph (eventuell rational) ist*[10]).

Es sei

$$\varphi(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe mit der folgenden Eigenschaft: Die Anzahl $\bar{N}(m)$ der Koeffizienten b_n, für welche $n \leqq m$ ist und die von 0 verschieden sind, erfüllt die Bedingung

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\bar{N}(m)}{m} = 0.$$

Solche Potenzreihen $\varphi(z)$ will ich als „Fabrysche Reihen" bezeichnen. In der Tat ist die letzte Bedingung mit der Fabryschen Lückenbedingung identisch, da man eine solche Potenzreihe stets in der Form

$$\varphi(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{m_\nu} z^{m_\nu} \qquad \left(\lim_{\nu \to \infty} \frac{m_\nu}{\nu} = \infty\right)$$

schreiben kann. Sie ist bekanntlich nicht fortsetzbar über ihren Konvergenzkreis hinaus (Fabryscher Lückensatz)[11]).

Daraus ist ersichtlich, daß eine Potenzreihe $f(z)$ von der in Satz 3 genannten Beschaffenheit stets die Summe einer Fabryschen Reihe und einer mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten ist. Satz 3 enthält somit (bis auf die Bedingung der Beschränktheit der Koeffizienten) auch den Fabryschen Lückensatz.

Um nun zum Beweis überzugehen, nehmen wir an, daß sich am Einheitskreis eine reguläre Stelle von $f(z)$ befindet; dann zeige ich die Existenz

---

[10]) Diese Formulierung von Satz 3 verdanke ich Herrn G. Pólya, der mir denselben (sogar den allgemeineren, in welchem die Koeffizienten nicht beschränkt zu sein brauchen, den ich leider nicht beweisen konnte) vermutungsweise mitgeteilt hat. Vgl. auch F. Carlson, Über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten [Mathematische Annalen **79** (1919), S. 237–245], wo über Potenzreihen vom genannten Typus (mit beliebigen Koeffizienten) einige bemerkenswerte Theoreme bewiesen werden.

[11]) Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux [Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) **13** (1896), S. 367–399], S. 381–382; Sur les séries de Taylor qui ont une infinité de points singuliers [Acta Mathematica **22** (1899), S. 65–87], S. 86. Vgl. auch F. Carlson und E. Landau, Neuer Beweis und Verallgemeinerungen des Fabryschen Lückensatzes [Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse 1921, S. 184–188], O. Szász, Über Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletsche Reihen am Rande des Konvergenzbereiches [Mathematische Annalen **85** (1922), S. 99–110].

eines Polynoms $P(z)$, dessen Wurzeln lauter Einheitswurzeln sind, von der Eigenschaft, daß

$$P(z)\,f(z)$$

eine Fabrysche Reihe ist.

Wir zerlegen zu diesem Zwecke die Potenzreihe $f(z)$ folgendermaßen. Es sei

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}[a_{m_\nu}z^{m_\nu}+g_\nu(z)],$$

wobei

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{m_\nu}{\nu}=\infty$$

ist und für die Koeffizienten von

$$g_\nu(z)=a_{m_\nu+1}z^{m_\nu+1}+\ldots+a_{m_{\nu+1}-1}z^{m_{\nu+1}-1}$$

nur die Werte $d_1, d_2, \ldots, d_k$ zulässig sind. Laut Voraussetzung können wir dann die Zahl q von der im obigen Hilfssatz besagten Eigenschaft bestimmen. Ich behaupte, daß

$$P(z)=\prod_{\lambda=1}^{K}(1-z^\lambda) \qquad (k^q=K)$$

das gewünschte leistet.

Es sei zunächst die Anzahl der Glieder von $g_\nu(z)$, d. h.

$$m_{\nu+1}-m_\nu-1\geqq K+q.$$

Da sich aus k Elementen K verschiedene q-gliedrige Gruppen bilden lassen, so gibt es zwei Zahlen α, β derart, daß

$$m_\nu+1\leqq\alpha<\beta\leqq m_\nu+K+1$$

und

$$a_\alpha=a_\beta,\ a_{\alpha+1}=a_{\beta+1},\ \ldots,\ a_{\alpha+q-1}=a_{\beta+q-1}$$

ist. (Man hat hier $\beta+q-1\leqq m_\nu+K+q\leqq m_{\nu+1}-1$.) Daraus folgt durch sukzessive Anwendung des obigen Hilfssatzes

$$a_m=a_{m+\beta-\alpha}\quad[\alpha\leqq m\leqq m_{\nu+1}-1-(\beta-\alpha)]$$

oder

$$a_r=a_{r+h}=a_{r+2h}=\ldots=a_{r+th}\quad(h=\beta-\alpha;\ \alpha\leqq r\leqq\beta-1).$$

Hierbei ist t die größte ganze Zahl, für welche

$$r+th\leqq m_{\nu+1}-1$$

ist, d. h.

$$t=\left[\frac{m_{\nu+1}-r-1}{h}\right].$$

Daraus ergibt sich

$$(1-z^h)g_\nu(z)=(1-z^h)(a_{m_\nu+1}z^{m_\nu+1}+\ldots+a_{\alpha-1}z^{\alpha-1})$$
$$+\sum_{r=\alpha}^{\beta-1}a_r z^r(1-z^{(t+1)h}),\text{ [12]}$$

d. h. ein Polynom mit höchstens

$$2(\alpha-1-m_\nu)+2(\beta-\alpha)=2(\beta-1-m_\nu)\leqq 2K$$

Gliedern. Nun enthält das Polynom

$$\frac{P(z)}{1-z^h}=\frac{\prod_{\lambda=1}^{K}(1-z^\lambda)}{1-z^h}$$

höchstens 2^{K-1} Glieder. Daraus folgt, daß das Produkt

$$P(z)\,g_\nu(z)$$

höchstens $2^K K$ Glieder aufweist.

Es sei andererseits die Anzahl der Glieder von $g_\nu(z)$, d. h.

$$m_{\nu+1}-m_\nu-1<K+q.$$

Dann enthält das letzte Produkt höchstens $2^K(K+q-1)$ Glieder. Jedenfalls können wir also behaupten, daß das Produkt

$$P(z)\sum_{s=1}^{\nu}[a_{m_s}z^{m_s}+g_s(z)]$$

höchstens

$$2^K\nu+2^K(K+q-1)=2^K(\nu+K+q-1)$$

Glieder hat.

Es sei nun

$$m_\nu\leqq m<m_{\nu+1}$$

und man bezeichne mit $N^*(m)$ die Anzahl der von 0 verschiedenen Glieder von

$$P(z)\,f(z),$$

deren Index $\leqq m$ ist. Da solche Glieder nur durch den Teil

$$P(z)\sum_{s=1}^{\nu}[a_{m_s}z^{m_s}+g_s(z)]$$

geliefert werden können, hat man

$$N^*(m)\leqq 2^K(\nu+K+q-1);$$

[12]) Ist $\alpha=m_\nu+1$, so fehlt rechter Hand das erste Glied.

also ist

$$\frac{N^*(m)}{m} \leqq 2^K \frac{\nu + K + q - 1}{m_\nu},$$

d. h.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{N^*(m)}{m} = 0;$$

w. z. b. w.[13])

3. **Satz 4.** *Es seien die Koeffizienten der Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

beschränkt, und sie mögen nur endlich viele Häufungsstellen haben, die sämtlich endlich sind. D. h.

$$f(z) = g(z) + h(z),$$

wobei unter den Koeffizienten von $g(z)$ nur endlich viele voneinander verschieden sind, während die von $h(z)$ gegen Null konvergieren. Läßt sich dann $f(z)$ über den Einheitskreis fortsetzen, so sind die Koeffizienten von $g(z)$ (von einem gewissen an) periodisch, d. h.

$$g(z) = \frac{P(z)}{1 - z^m},$$

wobei $P(z)$ ein Polynom ist.

Es sei

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n,$$

wobei die Koeffizienten g_n nur endlich vieler Werte fähig sind. Dann ist

$$a_n = g_n + \varepsilon_n \qquad (\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0),$$

also nach Satz 1

$$|\gamma_0 g_n + \gamma_1 g_{n+1} + \cdots + \gamma_{q-1} g_{n+q-1} + g_{n+q}|$$
$$< \varepsilon + |\gamma_0|\,|\varepsilon_n| + |\gamma_1|\,|\varepsilon_{n+1}| + \cdots + |\gamma_{q-1}|\,|\varepsilon_{n+q-1}| + |\varepsilon_{n+q}| < 2\varepsilon,$$

wenn n genügend groß ist. Daraus ergibt sich aber genau so wie a. a. O. [4]) (vgl. auch den Hilfssatz im Abschnitt 1 dieses Paragraphen), daß die g_n periodisch sind, w. z. b. w.

---

[13]) Man könnte für $P(z)$ statt

$$\prod_{\lambda=1}^{K} (1 - z^\lambda)$$

auch den folgenden Ausdruck wählen:

$$1 - z^{K!}.$$

Dann ergibt sich ein etwas schärferes Resultat als im Texte. Es stellt sich nämlich heraus, daß $z = 1$ höchstens ein Pol erster Ordnung ist. [Bemerkung von Herrn G. Pólya.]

4. Satz 5. *Die Koeffizienten einer Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

mögen nur endlich viele verschiedene Werte $d_1, d_2, \ldots, d_k$ *annehmen, mit Ausnahme einer Folge*

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots$$

von Koeffizienten, die den folgenden Bedingungen unterworfen sind:

a) $\limsup_{\nu \to \infty} (n_\nu - n_{\nu-1}) = \infty$.

b) *Sie sind beschränkt.*

c) *Sie haben von den Zahlen* $d_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ *eine von* 0 *verschiedene untere Entfernung.*

Dann ist $f(z)$ *nicht über den Einheitskreis fortsetzbar.*

Es ist nämlich nach Satz 1

$$|\gamma_0 a_n + \gamma_1 a_{n+1} + \ldots + \gamma_{q-1} a_{n+q-1} + a_{n+q}| < \varepsilon \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei ε eine beliebige kleine positive Zahl ist und $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}$ passend gewählte Konstanten bezeichnen. Es sei ν ein solcher Index, daß $n_\nu - n_{\nu-1} > K + q + 1$ sei, wobei $K = k^q$ die Anzahl der q-gliedrigen Zahlengruppen, die sich aus den Zahlen $d_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ gebildet werden können, bezeichnet. Dann gibt es zwei Zahlen α, β, für welche

$$n_{\nu-1} + 1 \leqq \alpha < \beta \leqq n_{\nu-1} + K + 2$$

ist, derart, daß

$$a_\alpha = a_\beta,\ a_{\alpha+1} = a_{\beta+1},\ \ldots,\ a_{\alpha+q-1} = a_{\beta+q-1}.$$

(Vgl. den Beweis von Satz 3.) Durch sukzessive Anwendung des Kunstgriffes, der beim Beweis des Hilfssatzes in Abschnitt 1 dieses Paragraphen angewendet wurde, ergibt sich

$$a_n = a_{n+\beta-\alpha} \qquad (\alpha \leqq n \leqq n_\nu - \beta + \alpha - 1)$$

und

$$|a_{n_\nu} - a_{n_\nu - (\beta-\alpha)}| < 2\varepsilon.$$

Da aber ε beliebig klein ist, so widerspricht dies der Bedingung c).

5. Satz 6. *Es sei*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe, deren Koeffizienten die Bedingung

$$a_n = o(n)$$

erfüllen, jedoch mit Ausnahme einer unendlichen Folge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_\nu}, \ldots$$

von Koeffizienten, für welche

$$\text{a)}\quad \limsup_{\nu\to\infty}(n_\nu - n_{\nu-1}) = \infty,$$

$$\text{b)}\quad c_3 < \left|\frac{a_{n_\nu}}{n_\nu}\right| < c_4$$

gilt. Dann ist $f(z)$ nicht über den Einheitskreis fortsetzbar.

Man betrachte die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}z^n$$

mit beschränkten Koeffizienten, die gleichzeitig mit $f(z)$ fortsetzbar ist oder nicht. Laut Satz 1 hat man, wenn ε beliebig klein ist und $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{q-1}$ passend gewählte Zahlen bezeichnen,

$$\left|\gamma_0\frac{a_n}{n} + \gamma_1\frac{a_{n+1}}{n+1} + \ldots + \gamma_{q-1}\frac{a_{n+q-1}}{n+q-1} + \frac{a_{n+q}}{n+q}\right| < \varepsilon.$$

Daraus folgt aber

$$\limsup_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{n_\nu}}{n_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Ähnliches gilt für Potenzreihen mit

$$a_n = o(n^r), \qquad c_5 < \left|\frac{a_{n_\nu}}{n_\nu^r}\right| < c_6.$$

§ 4.

Neuer Beweis eines Pólya-Carlsonschen Satzes.

Der im Titel genannte Satz lautet:

Eine Potenzreihe

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit dem Konvergenzradius 1 stellt entweder eine rationale Funktion dar, oder sie ist nicht über den Einheitskreis fortsetzbar [14]).

Beweis. Es sei $f(z)$ regulär im Innern und auf der Kurve $\Gamma(\delta)$ (vgl. § 1). Nach einem klassischen Satz über die Potenzreihenentwicklung rationaler Funktionen genügt es zu zeigen, daß für genügend große n

$$\Delta_n^{(n)} = \Delta_n^{(n+1)} = 0$$

---

[14]) F. Carlson, Über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten [Mathematische Zeitschrift 9 (1921), S. 1–13].

ist, wenn

$$\Delta_p^{(q)} = \begin{vmatrix} a_p & a_{p+1} & \dots & a_{p+q} \\ a_{p+1} & a_{p+2} & \dots & a_{p+q+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p+q} & a_{p+q+1} & \dots & a_{p+2q} \end{vmatrix} \qquad (p, q = 0, 1, 2, \dots)$$

gesetzt wird[15]). Ich beweise hier nur die Gleichung $\Delta_n^{(n)} = 0$. Die andere Gleichung, nämlich $\Delta_n^{(n+1)} = 0$, erhält man genau so.

Die Behauptung ist mit der folgenden äquivalent: Für genügend große n gibt es (von n abhängige) nicht durchweg verschwindende Zahlen $l_0, l_1, \dots, l_n$ derart, daß

$$(3) \qquad \begin{cases} l_0 a_n + l_1 a_{n+1} + \dots + l_n a_{2n} = 0, \\ l_0 a_{n+1} + l_1 a_{n+2} + \dots + l_n a_{2n+1} = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_0 a_{2n} + l_1 a_{2n+1} + \dots + l_n a_{3n} = 0 \end{cases}$$

sei. Um dies zu beweisen, zeigen wir zunächst den folgenden Hilfssatz, den ich einer mündlichen Mitteilung des Herrn Fekete verdanke.

Hilfssatz. *Es sei C eine Kurve in der komplexen x-Ebene von der Beschaffenheit, daß man Polynome*

$$G_n(x) = x^n + g_1^{(n)} x^{n-1} + \dots + g_n^{(n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

finden kann, für welche auf C (von einem gewissen n an)

$$(2) \qquad |G_n(x)| < \vartheta^n$$

gilt; ϑ bezeichnet hier eine positive (von n unabhängige) Zahl, die kleiner als 1 ist. Dann gibt es auch nicht identisch verschwindende Polynome

$$H_n(x) = l_0^{(n)} + l_1^{(n)} x + \dots + l_n^{(n)} x^n \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

mit ganzzahligen[16]) Koeffizienten $l_\nu^{(n)}$ ($\nu = 0, 1, \dots, n$), für welche auf C (von einem gewissen n an)

$$(4) \qquad |H_n(x)| < \vartheta_1^n$$

ist, wobei ϑ_1 gleichfalls eine feste positive Zahl kleiner als 1 bezeichnet.

Der Beweis[17]) stützt sich auf den folgenden Satz von Minkowski:

Eine positiv definite Hermitesche Form von $n+1$ Veränderlichen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ mit der Determinante D läßt sich durch passende Wahl

[15]) Vgl. a. a. O. [14]).

[16]) Ganzzahlig heißt: von der Form $a + bi$, wobei a und b ganze rationale Zahlen sind.

[17]) Der hier mitgeteilte Beweis rührt von mir her.

der ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$, *die nicht durchweg verschwinden, kleiner machen als*

$$(n+1)\sqrt[n+1]{D}.$$ [18])

Man betrachte die Hermitesche Form

$$F_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_C |a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n|^2 d\sigma.$$

und bezeichne ihre Determinante mit D_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $d\sigma$ ist das Bogenelement von C). Nach einem elementaren Satze ist

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \underset{a_0=1}{\mathrm{Min}}\, F_n(a_0, a_1, \ldots, a_n).$$

Man hat also (von einem gewissen n an)

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} \leqq \int_C |G_n(x)|^2 d\sigma < c_7 \vartheta^{2n}.$$

Daraus folgt aber

$$D_n < c_8 c_7^{n+1} \vartheta^{n(n+1)},$$

d. h.

$$(n+1)\sqrt[n+1]{D_n} < c_9 (n+1)\vartheta^n.$$

Es existiert somit ein nicht identisch verschwindendes Polynom $K_n(x)$ mit lauter ganzzahligen Koeffizienten, für welches

$$\int_C |K_n(x)|^2 d\sigma < c_9(n+1)\vartheta^n$$

ist [19]).

Es sei nun C^* eine geschlossene, stetige Kurve, die C völlig enthält, ohne gemeinsame Punkte mit ihr zu haben, und für welche die in der Einleitung definierte „Abbildungskonstante" γ^* noch immer kleiner als 1 ist. (Dies ist nach Faber die notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Polynome $G_n(x)$ existieren.) Dann gibt es also Polynome

$$G_n^*(x) = x^n + g_1^{(n)*} x^{n-1} + \ldots + g_n^{(n)*} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

für welche (von einem gewissen n an)

$$|G_n^*(x)| < \vartheta^{*n}$$

ist, wenn x auf C^* liegt. Hier bezeichnet ϑ^* eine feste positive Zahl,

---

[18]) Über die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnliche Algorithmen [Journal für die reine und angewandte Mathematik 107 (1891), S. 278–297]; vgl. auch Gesammelte Abhandlungen 1 (1911), S. 243–260.

[19]) Für den Fall, wo C eine geradlinige Strecke ist, vgl. man hierzu: D. Hilbert, Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynoms [Acta Mathematica 18 (1894), S. 155–159].

die kleiner als 1 ist. Daraus folgt aber, wie wir eben gesehen haben, die Existenz von Polynomen

$$H_n(x) = l_0^{(n)} + l_1^{(n)} x + \dots + l_n^{(n)} x^n,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen sind, die überdies nicht sämtlich verschwinden und für welche

$$\int_{C^*} |H_n(x)|^2 d\sigma < c_{10}(n+1)\vartheta^{*n}$$

ist.

Man hat nun nach Cauchy

$$[H_n(x)]^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^*} \frac{[H_n(\xi)]^2}{\xi - x} d\xi,$$

wobei x auf C liegt. Dann hat aber $|x-\xi|$ eine positive untere Schranke, d. h.

$$|H_n(x)|^2 < c_{11}(n+1)\vartheta^{*n},$$

w. z. b. w.

(3) läßt sich nun folgendermaßen beweisen. Wird δ genügend klein gewählt, so besitzt die Kurve $\Gamma(\delta)$ die in § 1 benützte Eigenschaft. D. h. es gibt (von δ unabhängige) Polynome

$$G_n\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} + \frac{g_1^{(n)}}{z^{n-1}} + \dots + g_n^{(n)},$$

für welche (von einem gewissen n an)

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \vartheta^n$$

ist, wenn z auf $\Gamma(\delta)$ liegt. Nach dem Hilfssatz gibt es also nicht identisch verschwindende Polynome mit *ganzzahligen* Koeffizienten

$$H_n\left(\frac{1}{z}\right) = l_0^{(n)} + \frac{l_1^{(n)}}{z} + \dots + \frac{l_n^{(n)}}{z^n},$$

für welche (von einem gewissen n an)

$$\left|H_n\left(\frac{1}{z}\right)\right| < \vartheta_1^n \qquad (0 < \vartheta_1 < 1)$$

ist. Man hat aber

$$l_0^{(n)} a_{n+\nu} + l_1^{(n)} a_{n+\nu+1} + \dots + l_n^{(n)} a_{2n+\nu}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\delta)} \frac{f(z)}{z^{n+\nu+1}}\left(l_0^{(n)} + \frac{l_1^{(n)}}{z} + \dots + \frac{l_n^{(n)}}{z^n}\right) dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\delta)} \frac{f(z)}{z^{n+\nu+1}} H_n\left(\frac{1}{z}\right) dz,$$

d. h.

$$\left|l_0^{(n)} a_{n+\nu} + l_1^{(n)} a_{n+\nu+1} + \dots + l_n^{(n)} a_{2n+\nu}\right| < c_{12}\frac{M(\delta)}{(1-\delta)^{n+\nu+1}}\vartheta_1^n$$
$$\leq c_{12}\frac{M(\delta)}{(1-\delta)^{2n+1}}\vartheta_1^n \qquad (\nu = 0, 1, \dots, n).$$

Hier ist — wie in § 1 — $M(\delta)$ das Maximum von $|f(z)|$ auf $\Gamma(\delta)$. Wird nun δ so klein gewählt, daß

$$\frac{\vartheta_1}{(1-\delta)^2} < 1$$

ist, dann ist der Ausdruck rechter Hand für genügend große n kleiner als 1, d. h. die Ausdrücke linker Hand verschwinden wegen der Ganzzahligkeit sämtlicher Größen $l_\nu^{(n)}$, a_ν. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

§ 5.
Neuer Beweis eines Ostrowskischen Satzes.

Herr Ostrowski hat in seiner Note „Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten"[20]) den folgenden überraschenden Satz bewiesen:

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1. *Es soll ferner eine Indexfolge* $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ *existieren derart, daß nach dem Gliede mit dem Exponenten* n_ν *mindestens* $[\varepsilon n_\nu]$ *Glieder fehlen, wobei* ε *eine feste positive Zahl bezeichnet. Dann konvergieren die Partialsummen*

$$s_{n_1}(z),\ s_{n_2}(z),\ \ldots,\ s_{n_\nu}(z),\ \ldots$$

über jeden regulären Punkt des Konvergenzkreises hinaus.

Beweis. Es sei $f(z)$ regulär in dem oben betrachteten Bereiche, dessen Begrenzung von der Kurve $\Gamma(\delta)$ gebildet ist. Man hat alsdann, wenn z im Innern von $\Gamma(\delta)$ liegt,

$$f(z) - s_{n_\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} f(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta - z} - \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{z}{\zeta^2} + \ldots + \frac{z^{n_\nu}}{\zeta^{n_\nu+1}}\right)\right] d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} f(\zeta)\,\frac{\dfrac{z^{n_\nu+1}}{\zeta^{n_\nu+1}}}{\zeta - z}\, d\zeta;$$

d. h. wegen des Vorhandenseins der Lücke nach a_{n_ν}

$$\frac{f(z) - s_{n_\nu}(z)}{z^{n_\nu+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n_\nu+1}}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n_\nu+1}}\left(\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\alpha}{\zeta} + \frac{\beta}{\zeta^2} + \ldots + \frac{\lambda}{\zeta^{p+1}}\right) d\zeta,$$

[20]) Sitzungsberichte der preußischen Akademie der Wissenschaften 1921, S. 557 bis 565.

wobei $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ beliebige Konstanten und $p = [\varepsilon n_\nu] - 1$ ist. D. h.

$$\frac{f(z) - s_{n_\nu}(z)}{z^{n_\nu+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n_\nu+2}}\left[\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} - \Pi\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] d\zeta,$$

wo $\Pi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ *irgendein* Polynom p-ten Grades von $\frac{1}{\zeta}$ bezeichnet.

Es liege nun z in einem Bereiche B, der ganz im Innern von $\Gamma(\delta)$ liegt. Es sei

$$a < \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| < b,$$

wo a und b feste positive Zahlen sind. Nach einem fundamentalen Satz der Funktionentheorie gibt es ein Polynom $R\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ von $\frac{1}{\zeta}$, für welches etwa

$$\left|\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} - R\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| < \frac{1}{2b}$$

ist, wenn z in B und ζ auf $\Gamma(\delta)$ liegt. Es sei r der Grad von $R\left(\frac{1}{\zeta}\right)$. Man setze

$$\Pi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} - \frac{\left[1 - \left(1-\frac{z}{\zeta}\right) R\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]^{\frac{p'+1}{r+1}}}{1-\frac{z}{\zeta}},$$

wobei p' die größte ganze Zahl bezeichnet, die p nicht übertrifft und für die $p'+1$ durch $r+1$ teilbar ist.

Dies ist ein ganz bestimmtes Polynom höchstens p-ten Grades. Man hat ferner

$$\left|\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} - \Pi\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right| < \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p'+1}{r+1}},$$

wenn z und ζ die obige Bedeutung haben. Daraus folgt

$$\left|\frac{f(z) - s_{n_\nu}(z)}{z^{n_\nu+1}}\right| < \frac{c_{13}}{(1-\delta)^{n_\nu+2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p'+1}{r+1}}.$$

Also hat man

$$\limsup_{\nu\to\infty} |f(z) - s_{n_\nu}(z)|^{\frac{1}{n_\nu}} \leqq \frac{|z|}{1-\delta}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\varepsilon}{r+1}}.$$

Da ferner dies für jedes $\delta > 0$ gültig ist (vgl. Einleitung),

$$\limsup_{\nu\to\infty} |f(z) - s_{n_\nu}(z)|^{\frac{1}{n_\nu}} \leqq \frac{|z|}{2^{\frac{\varepsilon}{r+1}}}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes z im Innern von $\Gamma(0) = \Gamma$ und zwar gleichmäßig in jedem inneren Bereiche. Wird nun z so eingeschränkt, daß

$$\frac{|z|}{2^{\frac{s}{r+1}}} \leqq \vartheta < 1$$

ist, dann ergibt sich in dem auf diese Weise definierten Bereiche die gleichmäßige Konvergenz von $s_{n_\nu}(z)$ gegen $f(z)$. Wird ϑ genügend nahe zu 1 gewählt, dann ragt dieser Bereich über den Einheitskreis hinaus.

§ 6.

Über Potenzreihen, deren einzelne Abschnittsfolgen über den Konvergenzkreis hinaus konvergieren.

Die im vorigen Paragraphen behandelten Potenzreihen sind offenbar vom gleichen Typus, wie sie am Ende von § 1 kurz erwähnt worden sind, nämlich von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{m_\nu} z^{m_\nu},$$

wobei

$$\limsup_{\nu \to \infty} \frac{m_\nu}{m_{\nu-1}} > 1$$

ist. Solche Potenzreihen sind nach § 1 über den Einheitskreis nicht fortsetzbar, sobald

$$\lim_{\nu \to \infty} \sqrt[m_\nu]{|a_{m_\nu}|} = 1$$

ist. Die in der Voraussetzung des Ostrowskischen Satzes geforderte Regularität kann also nie erfüllt sein, sobald die Koeffizienten der letzten Gleichung genügen.

Trotzdem könnte man glauben, daß es auch in diesem Falle vorkommen kann, daß einzelne Abschnittsfolgen der gegebenen Potenzreihe über den Einheitskreis hinaus konvergieren. Ich werde nun zeigen, daß es dem nicht so ist. Es gilt nämlich der folgende

Satz 7. *Es sei*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius 1, *und die Partialsummen*

$$s_{n_1}(z),\ s_{n_2}(z),\ \ldots,\ s_{n_\nu}(z),\ \ldots$$

seien gleichmäßig konvergent (oder nur beschränkt) in einem Bereiche, der über den Einheitskreis hinausragt[21]). *Dann ist*

$$\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|} < 1.$$

Es konvergieren also auch die Abschnitte $s_{n_\nu - 1}$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) *und überhaupt die Abschnitte mit um* m *niedrigerem Index, wobei* m *eine feste positive Zahl ist. (Die Bereiche der Konvergenz bzw. Beschränktheit sind hierbei immer kleiner und kleiner.)*

Die ersten Beispiele für solche Potenzreihen, deren geeignet gewählte Abschnitte über den (von 0 verschiedenen) Konvergenzkreis hinaus konvergieren, rühren von R. Jentzsch her[22]).

Laut Voraussetzung gibt es einen Bereich, dessen Begrenzung von einer Kurve $\Gamma(\delta)$ gebildet ist, in welchem

$$|s_{n_\nu}(z)| < A \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Man bezeichne mit $\psi(z)$ die Funktion, die das Äußere von $\Gamma(\delta)$ auf das Äußere eines Kreises um den Nullpunkt als Mittelpunkt abbildet. Die Vergrößerung im unendlich fernen Punkte sei hierbei gleich 1. Dann ist der Radius γ dieses Kreises größer als 1. Es ist ferner auf $\Gamma(\delta)$

$$|\psi(z)| = \gamma.$$

Die Funktion

$$\frac{s_n(z)}{[\psi(z)]^n}$$

ist nun regulär, wenn z außerhalb oder auf $\Gamma(\delta)$ liegt und für $z = \infty$ gleich a_n. D. h.

$$\underset{\Gamma(\delta)}{\operatorname{Max}} \left| \frac{s_n(z)}{[\psi(z)]^n} \right| = \frac{1}{\gamma^n} \underset{\Gamma(\delta)}{\operatorname{Max}} |s_n(z)| \geqq a_n. \text{ [23])}$$

Es ist somit

$$|a_{n_\nu}| < \frac{A}{\gamma^{n_\nu}},$$

also

$$\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[n_\nu]{|a_{n_\nu}|} \leqq \frac{1}{\gamma} < 1,$$

w. z. b. w.

---

[21]) Dieser Bereich kann sich auch auf eine Kurve reduzieren. Der Beweis gestaltet sich dann ähnlich, wie im Text.

[22]) Fortgesetzte Untersuchungen über die Abschnitte von Potenzreihen [Acta Mathematica 41 (1918), S. 253–270]. Vgl. II. Abschnitt, §§ 2, 3.

[23]) Vgl. Faber a. a. O. [1]) b).

Existiert also bei einer Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

so kann die Jentzsche Erscheinung nie auftreten.

Bemerkung. (Hinzugefügt am 8. 2. 1922.) *Unter der Voraussetzung von Satz 7 konvergieren auch die Abschnitte*

$$s_{n_1+1}(z),\ s_{n_2+1}(z),\ \ldots,\ s_{n_\nu+1}(z),\ \ldots,$$

also überhaupt die Abschnitte mit um m größerem Index, wobei m eine feste positive Zahl bezeichnet.

Der Beweis geschieht ganz analog, wie der von Satz 7, mit dem einzigen Unterschied, daß hier die Abbildungsfunktion $\psi^*(z)$ des *Innen*gebietes von $\Gamma(\delta)$ (statt $\psi(z)$) herangezogen wird. Es sei also $\psi^*(z) = z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots$ schlicht in $\Gamma(\delta)$ und $|\psi^*(z)| = \gamma^* > 1$ auf $\Gamma(\delta)$, wobei δ genügend klein angenommen wird. Dann ist die Funktion

$$\frac{s_{n_\nu+1}(z) - s_{n_\nu}(z)}{[\psi^*(z)]^{n_\nu+1}}$$

regulär im Innern und auf $\Gamma(\delta)$ und gleich $a_{n_\nu+1}$ für $z = 0$. Es ist also

$$|a_{n_\nu+1}| \leqq \operatorname*{Max}_{\Gamma(\delta)} \left| \frac{s_{n_\nu+1}(z) - s_{n_\nu}(z)}{[\psi^*(z)]^{n_\nu+1}} \right| < \frac{2A}{\gamma^{*\,n_\nu+1}},$$

d. h.

$$\limsup_{\nu \to \infty} \sqrt[n_\nu+1]{|a_{n_\nu+1}|} \leqq \frac{1}{\gamma^*} < 1,$$

w. z. b. w.

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, den folgenden Satz zu formulieren, der sich hierbei ergeben hat:

Es sei Γ eine stetige Kurve, die den Nullpunkt umschließt, und r_i bzw. r_a seien die Radien der Kreise um den Nullpunkt, auf deren Inneres bzw. Äußeres man das Innere bzw. Äußere von Γ konform abbilden kann, wobei die Abbildungsfunktionen auf die übliche Weise wie $z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots$, bzw. $z + \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \ldots$ normiert sind.

Es sei $P(z) = a z^k + \ldots + A z^K$ ein beliebiges Polynom nach wachsenden Potenzen von z geordnet. Dann genügt das Maximum M von $|P(z)|$ auf Γ den folgenden beiden Ungleichungen:

$$M \geqq |a|\, r_i^k, \quad M \geqq |A|\, r_a^K.$$

(Eingegangen am 12. 10. 1921.)

Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen.

Von

Hans Rademacher in Hamburg.

Einleitung.

Der Riesz-Fischersche Satz, der besagt, daß es zu jeder Folge von reellen Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_\nu, \ldots$ mit konvergenter Quadratsumme eine höchstens bis auf eine Nullmenge bestimmte Funktion $f(x)$ gibt, deren Fourierkoeffizienten in bezug auf ein vorgegebenes System von Orthogonalfunktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ die Zahlen c_ν sind, hat eine Reihe von Versuchen hervorgebracht, jene Funktion $f(x)$ in rechnerisch einfache Beziehung zu den c_ν und den $\varphi_\nu(x)$ zu setzen. Das allgemeinste Ergebnis in dieser Richtung ist wohl der Satz von Weyl[1]), nach dem man aus der Reihe

$$(1) \qquad c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots$$

stets eine fast überall konvergente Folge von Teilsummen auswählen kann, deren Limesfunktion, wie man leicht sieht, die vom Riesz-Fischerschen Satz behaupteten Eigenschaften besitzt. Dieser Weylsche Satz soll im folgenden dahin präzisiert werden, daß zu vorgelegter konvergenter Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ die Indizes der Teilsummen einer konvergenten Folge explizite angegeben werden.

Über die Konvergenz der Reihe $\Sigma\, c_\nu \varphi_\nu(x)$ selbst hat man bisher nur Aussagen machen können, indem man über die c_ν noch mehr als nur die Konvergenz von $\Sigma\, c_\nu^2$ voraussetzte. Jerosch[2]) und Weyl[3]) haben hierin den

[1]) Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, Math. Ann. 67 (1909), S. 225–245, insbes. S. 243–245.

[2]) F. Jerosch und H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten, Math. Ann. 66 (1909), S. 67–80; vgl. auch die unter [1]) zitierte Arbeit von Weyl, S. 229 oben.

[3]) A. a. O. [1]) S. 226 ff.

Anfang gemacht, jener, indem er unter der Voraussetzung $c_\nu = O\left(\nu^{-\frac{\sqrt{17}-1}{4}-\varepsilon}\right)$, dieser, indem er unter Voraussetzung der Konvergenz von $\Sigma c_\nu^2 \sqrt{\nu}$ bewies, daß die Reihe (1) fast überall konvergent ist. Der nächste Schritt wurde von Hobson getan [4]), der zeigte, daß zu der Konvergenz bis auf eine Nullmenge (der „fast ausnahmslosen" Konvergenz, wie wir im folgenden sagen werden) schon die Voraussetzung der Konvergenz von $\Sigma c_\nu^2 \nu^\alpha$ bei irgendeinem $\alpha > 0$ hinreicht. Endlich hat Plancherel bewiesen [5]), daß für dieses Konvergenzverhalten von (1) schon die Konvergenz von $\Sigma c_\nu^2 (\log \nu)^3$ hinreicht. Aus einem Satze von Hardy [6]), auf den Hobson [7]) und neuerdings Neder [8]) hingewiesen haben, folgt, daß die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ schon dann fast überall konvergiert, wenn $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu^2 + b_\nu^2)(\log \nu)^2$ konvergent ist. Die naheliegende Frage, ob sich in dem Plancherelschen Satze diesem Hardyschen Satze entsprechend für allgemeine Orthogonalfunktionen der Exponent 3 des Logarithmus durch 2 ersetzen läßt, wird im folgenden bejahend beantwortet. In diesem Zusammenhange sei endlich noch erwähnt, daß Herr Neder neuerdings durch Beispiele klargestellt hat, daß die Konvergenz von $\Sigma c_\nu^2 (\log \nu)^\alpha$ für irgendein $\alpha < 0$ gewiß nicht ausreicht, um fast überall die Konvergenz von (1) zu sichern [9]).

Außer der schon erwähnten Ergänzung des Weylschen und der Verschärfung des Plancherelschen Satzes enthält die folgende Untersuchung noch asymptotische Abschätzungen über Summen von Orthogonalfunktionen. Mit Hilfe eines Satzes von I. Schur werden viele Eigenschaften von Orthogonalfunktionen auf eine weitere Klasse von Funktionen übertragen. Außerdem werden die verallgemeinerten „Lebesgueschen Konstanten" auf ihr infinitäres Verhalten hin untersucht. Ein durchgeführtes Beispiel grenzt

---

[4]) On the convergence of series of orthogonal functions. Proc. of the London Math. Soc. (2) **12** (1913), S. 297–308.

[5]) Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris **157** (1913), S. 539–542.

[6]) On the summability of Fourier's series, Proc. of the London Math. Soc. (2) **12** (1913), S. 365–372. Der erwähnte Satz lautet genau: „Ist $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_\nu a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$ eine Fourierreihe, so ist $\sum \frac{a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x}{\log \nu}$ fast überall konvergent." (Theorem 3, S. 370.) Die oben hervorgehobene Konsequenz erhält man in dem Spezialfall, wo die Fourierreihe zu einer *samt ihrem Quadrate* integrierbaren Funktion gehört.

[7]) Proc. of the London Math. Soc. (2) **14**, S. 428–439, insbes. S. 429.

[8]) Math. Ann. **84** (1921) [S. 117–136], S. 131.

[9]) A. a. O. [8])

dann den Spielraum ab, in dem man die erhaltenen Abschätzungen etwa noch verbessern könnte.

I. Fast überall konvergente Teilfolgen von $\sum c_\nu \varphi_\nu(x)$.

1. Es sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ ein System von samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktionen, die im Intervall $(0\ldots 1)$ orthogonal und normiert sind:

$$\int_0^1 \varphi_\mu(x)\varphi_\nu(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \mu = 0 \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{2}$$

Ferner sei $c_1, c_2, \ldots, c_\nu, \ldots$ eine Folge von reellen Zahlen und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ sei konvergent. Dann gibt es stets monoton ins Unendliche wachsende Folgen von positiven Zahlen $\lambda(\nu)$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \lambda(\nu) \tag{3}$$

gleichfalls konvergent ausfällt. Ist $r_n = \sum\limits_{\nu=n}^{\infty} c_\nu^2$, so kann man z. B. für irgendein $0 < \gamma < 1$ setzen

$$\lambda(\nu) = r_\nu^{-\gamma},$$

wofür man die Konvergenz von (3) leicht einsieht. Ferner sei Λ_ϱ das kleinste ν, für das $\lambda(\nu) \geqq \varrho$ ausfällt, $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ Dann ist $\lambda(\Lambda_\varrho) \geqq \varrho$. Unter diesen Voraussetzungen und Bezeichnungen gilt nun der

Satz I. *Die Folge von Teilsummen* $\sum\limits_{\nu=1}^{\Lambda_\varrho} c_\nu \varphi_\nu(x)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots)$ *ist fast überall konvergent.*

Bemerkenswert ist an diesem Satz, daß er die Auswahl der Teilsummen nur aus der Folge $\{c_\nu\}$ bestimmt, unabhängig von dem zugrunde gelegten Orthogonalsystem.

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$s(x; m, n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x), \quad \sigma(m, n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} c_\nu^2, \quad \tau(m, n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} c_\nu^2 \lambda(\nu).$$

Dann ergibt sich unter Benutzung von (2) für $0 < N < n$

$$\int_0^1 \sum_{r=N}^{n-1} \{s(x; \Lambda_r, \Lambda_n)\}^2\,dx = \sum_{r=N}^{n-1} \int_0^1 \{s(x; \Lambda_r, \Lambda_n)\}^2\,dx = \sum_{r=N}^{n-1} \sigma(\Lambda_r, \Lambda_n)$$

$$= \sum_{r=N}^{n-1} \sum_{\varrho=r}^{n-1} \sigma(\Lambda_\varrho, \Lambda_{\varrho+1}) = \sum_{\varrho=N}^{n-1} (\varrho - N + 1)\,\sigma(\Lambda_\varrho, \Lambda_{\varrho+1}) \leqq \sum_{\varrho=N}^{n-1} \lambda(\Lambda_\varrho)\,\sigma(\Lambda_\varrho, \Lambda_{\varrho+1})$$

$$\leqq \sum_{\varrho=N}^{n-1} \sum_{\nu=\Lambda_\varrho+1}^{\Lambda_{\varrho+1}} \lambda(\nu)\, c_\nu^2 = \sum_{\nu=\Lambda_N+1}^{\Lambda_n} c_\nu^2 \lambda(\nu) = \tau(\Lambda_N, \Lambda_n).$$

Also ist der positive Integrand

$$\sum_{r=N}^{n-1} \{s(x; \Lambda_r, \Lambda_n)\}^2 < \tau(\Lambda_N, \Lambda_n)^{\frac{3}{2}}$$

in einer Menge $E_{N,n}$, deren Maß[10]) größer oder gleich $1 - \tau(\Lambda_N, \Lambda_n)^{\frac{1}{2}}$. Erst recht ist also

$$m E_{N,n} \geqq 1 - \tau(\Lambda_N, \infty)^{\frac{1}{2}}$$

und in $E_{N,n}$

$$|s(x; \Lambda_r, \Lambda_n)| < \tau(\Lambda_N, \infty)^{\frac{1}{2}},$$

für jedes r, das $N \leqq r \leqq n$ genügt. Die Menge $E'_{N,n}$, in der für alle ganzen r und r_1 unter der Bedingung $N \leqq r \leqq r_1 \leqq n$

$$|s(x; \Lambda_r, \Lambda_{r_1})| < 2\tau(\Lambda_N, \infty)^{\frac{1}{2}}$$

stattfindet, enthält $E_{N,n}$ wegen

$$|s(x; \Lambda_r, \Lambda_{r_1})| \leqq |s(x; \Lambda_r, \Lambda_n)| + |s(x; \Lambda_{r_1}, \Lambda_n)|.$$

Folglich ist erst recht

$$m E'_{N,n} \geqq 1 - \tau(\Lambda_N, \infty)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist

$$(4) \qquad E'_{N,N+1} > E'_{N,N+2} > E'_{N,N+3} > \ldots,$$

was aus der Definition dieser Mengen unmittelbar folgt. Wir bilden den Durchschnitt

$$D_N = E'_{N,N+1} \cdot E'_{N,N+2} \cdot E'_{N,N+3} \ldots .$$

Wegen (4) ist dann nach einem Theorem der Maßtheorie

$$(5) \qquad m D_N = \lim_{k \to \infty} m E'_{N+k} \geqq 1 - \tau(\Lambda_N, \infty)^{\frac{1}{2}}.$$

In D_N ist nun

$$(6) \qquad |s(x; \Lambda_r, \Lambda_{r_1})| < 2\tau(\Lambda_N, \infty)^{\frac{1}{2}}$$

für alle r und r_1, die nur $N \leqq r \leqq r_1$ erfüllen. Aus den D_N bilden wir

$$V_N = D_N + D_{N+1} + D_{N+2} + \ldots;$$

wegen (5) ergibt sich

$$(7) \qquad m V_N = 1.$$

Endlich sei

$$V = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \ldots;$$

aus

$$V_1 > V_2 > V_3 > \ldots$$

---

[10]) Das Maß einer Menge E wird durch mE bezeichnet.

und aus (6) folgt dann auch

$$mV = 1.$$

Jeder Punkt von V gehört aber zu *unendlich vielen* D_N. In jedem Punkt x_0 von V gibt es daher zu beliebigem positiven ε ein N, so daß

$$|s(x_0;\, A_r, A_{r_1})| < \varepsilon$$

ist, für alle r und r_1, die $N \leqq r \leqq r_1$ erfüllen. Wegen (6) braucht man nämlich ein solches N aus den unendlich vielen N, für die x_0 in D_N liegt, nur so groß zu wählen, daß $\tau(A_N, \infty) < \frac{\varepsilon^2}{8}$ ausfällt. Damit ist bewiesen, daß

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{A_n} c_\nu \varphi_\nu(x) \tag{8}$$

in jedem Punkte von V, also fast überall im Orthogonalitätsintervalle, als endliche Funktion existiert.

Diesen Satz hätte man übrigens auch erhalten können durch Weiterverfolgung der Gedanken, die Weyl a. a. O. für den Beweis seines Auswahlsatzes verwendet.

2. Unter leichter Modifikation einer schon von Weyl ausgeführten Überlegung [11]) können wir den in der Einleitung erwähnten Zusammenhang unseres Satzes I mit dem Riesz-Fischerschen Satze herstellen, indem wir diesen aus Satz I herleiten.

Zu jedem positiven ε gibt es nämlich offenbar eine Teilmenge A_ε von V und eine Zahl M_ε, so daß in A_ε

$$|f(x)| < M_\varepsilon$$

gilt und zugleich

$$mA_\varepsilon > 1 - \varepsilon$$

ist. Wegen der Konvergenz in (8) gibt es ferner in A_ε eine Teilmenge B_ε, mit

$$mB_\varepsilon > 1 - 2\varepsilon,$$

und einen Index n_ε, so daß für $n \geqq n_\varepsilon$

$$\Big|\sum_{\nu=1}^{A_n} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big| < 2M_\varepsilon$$

bleibt. Aus der letzten Ungleichung kann man schließen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_\varepsilon} \Big(\sum_{\nu=1}^{A_n} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big)^2 dx = \int_{B_\varepsilon} f^2(x)\, dx$$

[11]) A. a. O. [1]) S. 226–227.

ist. Da nun

$$\int\limits_{B_\varepsilon} \Big(\sum_{\nu=1}^{A_m} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big)^2 dx \leqq \int\limits_0^1 \Big(\sum_{\nu=1}^{A_m} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big)^2 dx \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$$

ist, so gilt

$$\int\limits_{B_\varepsilon} f^2(x)\, dx \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 .$$

Setzt man $f(x)$ außerhalb von V im Orthogonalitätsintervalle irgendwie willkürlich fest, so folgt, da die Vereinigungsmenge aller B_ε die Menge V ausfüllen muß,

$$\int\limits_0^1 f^2(x)\, dx \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 .$$

Ebenso wie diese Ungleichung aus (8) folgt, so zieht die Relation

$$f(x) - \sum_{\nu=1}^{A_m} c_\nu \varphi_\nu(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=A_m+1}^{A_n} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

die Ungleichung

$$\int\limits_0^1 \Big\{f(x) - \sum_{\nu=1}^{A_m} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big\}^2 dx \leqq \sum_{\nu=A_m+1}^{\infty} c_\nu^2$$

nach sich. Hieraus schließt man

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_0^1 \Big\{f(x) - \sum_{\nu=1}^{A_m} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big\}^2 dx = 0,$$

also auch, zufolge der Schwarzschen Ungleichung, bei festem μ

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_0^1 \Big\{f(x) - \sum_{\nu=1}^{A_m} c_\nu \varphi_\nu(x)\Big\} \varphi_\mu(x)\, dx = 0 .$$

Dies bedeutet aber

$$c_\mu = \int\limits_0^1 f(x)\, \varphi_\mu(x)\, dx ,$$

worin der Riesz-Fischersche Satz ausgesprochen ist.

II. Fast ausnahmslose Konvergenz von $\sum c_\nu \varphi_\nu(x)$.

3. Über die Folge der c_ν sei jetzt noch weiter vorausgesetzt, daß $\Sigma (c_\nu \log \nu)^2$ konvergent ist. Im folgenden sei der Einfachheit halber unter „log" der Logarithmus zur Basis 2 verstanden. Unter der neuen

Voraussetzung können wir das $\lambda(\nu)$ des Satzes I gleich $\log \nu$, also $\Lambda_\varrho = 2^\varrho$, setzen und erhalten dann die Konvergenz von

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{2^n} c_\nu \varphi_\nu(x) \qquad n \to \infty$$

in einer maßgleichen Teilmenge V des Orthogonalitätsintervalls.

Die Bezeichnungen von § 1 mögen beibehalten werden; außerdem setzen wir

$$\omega(m, n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} (c_\nu \log \nu)^2 .$$

Es sei nun n eine ganze Zahl $2^r < n < 2^{r+1}$; sie läßt sich auf dyadische Art darstellen durch

$$n = 2^r + \vartheta_1 2^{r-1} + \vartheta_2 2^{r-2} + \ldots + \vartheta_{r-1} 2 + \vartheta_r, \qquad \vartheta_i = 0 \text{ oder } 1.$$

Hieraus ergibt sich die Zerlegung

$$(10) \qquad \begin{aligned} s(x; 2^r, n) &= s(x; 2^r, 2^r + \vartheta_1 2^{r-1}) \\ &+ s(x; 2^r + \vartheta_1 2^{r-1}, 2^r + \vartheta_1 2^{r-1} + \vartheta_2 2^{r-2}) + \ldots \\ &+ s(x; 2^r + \vartheta_1 2^{r-1} + \ldots + \vartheta_{r-1} 2, 2^r + \vartheta_1 2^{r-1} + \ldots + \vartheta_{r-1} 2 + \vartheta_r), \end{aligned}$$

worin diejenigen Klammern, deren letztes ϑ_i gleich 0 ist, selbst gleich 0 zu setzen sind. Die nicht verschwindenden Glieder der rechten Seite sind sämtlich von der Form

$$(11) \quad s(x; \alpha, \alpha') = s(x; 2^r + h \cdot 2^j, 2^r + h \cdot 2^j + 2^{j-1}), \quad \begin{aligned} j &= 1, 2, \ldots, r, \\ h &= 0, 1, 2, \ldots, (2^{r-j} - 1), \end{aligned}$$

und aus diesen Ausdrücken lassen sich alle $s(x; 2^r, n)$ für $2^r < n < 2^{r+1}$ zusammenfügen.

Nun folgt aus (10) durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \{s(x; 2^r, n)\}^2 &\leq \sum_{i=1}^{r} \vartheta_i \sum_{i=1}^{r} \{s(x; 2^r + \ldots + \vartheta_{i-1} 2^{r-i+1}, 2^r + \ldots + \vartheta_{i-1} 2^{r-i+1} + \vartheta_i 2^{r-i})\}^2 \\ &\leq r \sum_{i=1}^{r} \{s(x; 2^r + \ldots + \vartheta_{i-1} 2^{r-i+1}, 2^r + \ldots + \vartheta_{i-1} 2^{r-i+1} + \vartheta_i 2^{r-i})\}^2 \end{aligned}$$

und erst recht also

$$(12) \qquad \{s(x; 2^r, n)\}^2 \leq r \sum_{\alpha, \alpha'} \{s(x; \alpha, \alpha')\}^2,$$

worin (α, α') alle in (11) angegebenen Zahlenpaare durchläuft. Für $2^r < n < 2^{r+1}$ hängt die rechte Seite der Ungleichung (12) nicht mehr von n ab.

Nun ist

$$\int_0^1 \sum_{\alpha,\alpha'} \{s(x;\alpha,\alpha')\}^2\,dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=0}^{2^{r-j}-1} \{s(x;\,2^r+h\cdot 2^j,\,2^r+h\cdot 2^j+2^{j-1})\}^2\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=0}^{2^{r-j}-1} \sigma(2^r+h\cdot 2^j,\,2^r+h\cdot 2^j+2^{j-1}) \leqq \sum_{j=1}^{r} \sigma(2^r,2^{r+1}) = r\cdot\sigma(2^r,2^{r+1}),$$

und somit

$$(13) \qquad \int_0^1 r \sum_{\alpha,\alpha'} \{s(x;\alpha,\alpha')\}^2\,dx \leqq r^2\sigma(2^r,2^{r+1}) \leqq \omega(2^r,2^{r+1}).$$

Es sei nun $G_r(\delta)$ diejenige Teilmenge des Orthogonalitätsintervalls, in der

$$r \sum_{\alpha,\alpha'} \{s(x;\alpha,\alpha')\}^2 < \delta^2,$$

worin δ eine positive Zahl sei, über die noch verfügt werden soll. Wegen (13) ist

$$(14) \qquad m\,G_r(\delta) \geqq 1 - \frac{1}{\delta^2}\,\omega(2^r,2^{r+1}),$$

und wegen (12) gilt in $G_r(\delta)$ für alle n zwischen 2^r und 2^{r+1}

$$|s(x;\,2^r,n)| < \delta.$$

Wir bilden nun den Durchschnitt

$$H_N(\delta) = G_N(\delta)\cdot G_{N+1}(\delta)\cdot G_{N+2}(\delta)\ldots;$$

dann ist infolge von (14)

$$m\,H_N(\delta) \geqq 1 - \frac{1}{\delta^2}\sum_{r=N}^{\infty}\omega(2^r,2^{r+1}) = 1 - \frac{1}{\delta^2}\,\omega(2^N,\infty),$$

und für jedes x in $H_N(\delta)$ ist

$$|s(x;\,2^r,n)| < \delta,$$

wenn nur $N \leqq r$ und $2^r < n < 2^{r+1}$ gewonnen wird. Wählt man nun von vornherein $\delta = \omega(2^N,\infty)^{\frac{1}{3}}$, so führt diese Konstruktion auf eine Menge $H_N(\omega(2^N,\infty)^{\frac{1}{3}})$, die wir kurz mit H_N bezeichnen wollen. Von H_N weiß man

$$(15) \qquad m\,H_N \geqq 1 - \omega(2^N,\infty)^{\frac{1}{3}},$$

und in H_N gilt

$$(16) \qquad |s(x;\,2^r,n)| < \omega(2^N,\infty)^{\frac{1}{3}}$$

für $N \leqq r$, $2^r < n < 2^{r+1}$. Nun sei

$$U_N = H_N + H_{N+1} + H_{N+2} + \dots$$

Wegen (15) ist dann

$$m\,U_N = 1.$$

Endlich bilden wir

$$U = U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \dots;$$

es ist

$$m\,U = 1,$$

und jeder Punkt von U kommt in *unendlich vielen* H_N vor.

4. Jetzt betrachten wir den Durchschnitt

$$W = U \cdot V,$$

wo V die in § 1 konstruierte Menge in der ihr am Anfang von § 3 erteilten Spezialisation ist. Wir haben

$$m\,W = 1.$$

In W ist nun $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$ *konvergent*. Denn wegen der zu Anfang des § 3 erwähnten Konvergenz von $s(x;\, 0 . 2^n)$ in V gibt es in jedem Punkte x_0 von W zu beliebigem positivem ε ein N_1, so daß

$$|s(x_0;\, 2^r, 2^{r_1})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle r und r_1, die $N_1 \leqq r \leqq r_1$ erfüllen. Der Punkt x_0 von W liegt ferner in unendlich vielen H_N, und unter den hier vorkommenden Indizes N sei N_2 so groß gewählt, daß

$$\omega(2^{N_2}, \infty) < \frac{\varepsilon}{27}.$$

Da x_0 in H_{N_2} angenommen ist, so gilt wegen (16)

$$|s(x;\, 2^r, n)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $N_2 \leqq r$, $2^r \leqq n < 2^{r+1}$. Von den beiden Zahlen N_1 und N_2 sei N_* die größere. Da stets die Zerlegung

$$s(x;\, m, n) = s(x;\, 2^r, 2^{r_1}) + s(x;\, 2^{r_1}, n) - s(x;\, 2^r, m)$$

mit $2^r \leqq m < 2^{r+1}$, $2^{r_1} \leqq n < 2^{r_1+1}$ möglich ist, so hat man endlich für alle m und n, die $2^{N_*} \leqq m < n$ erfüllen,

$$|s(x_0;\, m, n)| < \varepsilon,$$

womit wir den folgenden Satz bewiesen haben:

Satz II. *Ist* $\sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu \log \nu)^2$ *konvergent, so konvergiert* $\Sigma\, c_\nu \varphi_\nu(x)$ *fast überall im Orthogonalitätsintervall.*

5. Daß die soeben bewiesene Konvergenz nach der Bezeichnung Weyls eine „wesentlich gleichmäßige" ist, folgt aus einem allgemeinen Satze von Egoroff [12]), wonach eine in einer Menge C konvergente Folge meßbarer Funktionen in gewissen Teilmengen, deren Maß beliebig wenig unter dem von C bleibt, gleichmäßig konvergent ist. Man kann im vorliegenden Falle aber leicht Mengen dieser Art herausheben. Die in § 1 auftretenden Mengen denken wir uns, dem zu Anfang von § 3 Gesagten gemäß, für $\lambda(\nu) = \log \nu$ und $\Lambda_\varrho = 2^\varrho$ gebildet, was unter der Annahme der Konvergenz von $\Sigma (c_\nu \log \nu)^2$ möglich ist. Nun sei $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p, \ldots$ eine solche monotone Folge von natürlichen Zahlen, daß

$$(17\text{a}) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \omega(2^{N_p}, \infty)^{\frac{1}{2}}$$

und also erst recht auch

$$(17\text{b}) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \tau(2^{N_p}, \infty)^{\frac{1}{2}}$$

konvergent ausfällt, unter $\tau(m, n)$ hierbei $\sum_{\nu=m+1}^{n} c_\nu^2 \log \nu$ verstanden. Aus den Mengen D_N des § 1 und den Mengen H_N des § 3 bilden wir nun die Durchschnitte

$$K_p = D_{N_p} \cdot H_{N_p} \cdot D_{N_{p+1}} \cdot H_{N_{p+1}} \ldots .$$

Da die Mengen D_N und H_N sämtlich im Einheitsintervall liegen, so liegt wegen (5) und (15) und wegen der Konvergenz von (17a) und (17b) das Maß von K_p bei hinreichend hohem p beliebig nahe bei 1. In K_p ist nun die Konvergenz von $\Sigma c_\nu \varphi_\nu(x)$ gleichmäßig. Denn wegen (6) und (16) ist für $2^{N_{p+k}} \leqq m < n$ stets in K_p

$$\Big| \sum_{m+1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) \Big| < 2\tau(2^{N_{p+k}}, \infty)^{\frac{1}{2}} + 2\omega(2^{N_{p+k}}, \infty)^{\frac{1}{2}}.$$

III. Abschätzungen endlicher Summen von Orthogonalfunktionen.

6. Ist Σc_ν^2 konvergent, so ist nach Satz II die Reihe

$$(18) \qquad \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{c_\nu}{\log \nu} \varphi_\nu(x)$$

im Intervall $(0 \ldots 1)$ fast überall konvergent. Die Folge $\left\{\frac{1}{\log \nu}\right\}$ ist monoton abnehmend mit dem Limes Null. Daraus schließt man nach

[12]) Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris 152 (1911), S. 244.

einem Satze von Kronecker[13]) leicht, daß an den Konvergenzstellen von (18)

(19) $$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x) = o(\log n)$$

sein muß, was daher fast überall im Orthogonalitätsintervall gelten muß. Sind die $\varphi_\nu(x)$ die trigonometrischen Funktionen und die c_ν die gewöhnlichen Fourierschen Konstanten einer integrierbaren Funktion, so findet sich diese Abschätzung schon bei Hardy[14]), doch sagt der Hardysche Satz auch hier wieder mehr aus (vgl. Einleitung, Fußnote [6])), denn die Voraussetzung der Konvergenz von Σc_ν^2 ist äquivalent mit der Annahme, daß die c_ν die Fourierkonstanten einer *samt ihrem Quadrat* integrierbaren Funktion seien.

Der eben erwähnte Kroneckersche Satz läßt noch mehrfache Anwendungen folgender Art zu. Es sei

$$c_\nu = \nu^{-\frac{1}{2}} (\log \nu)^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0, \ \nu = 2, 3, \ldots;$$

für diese Wahl ist $\Sigma (c_\nu \log \nu)^2$ konvergent. Folglich ist

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^{-\frac{1}{2}} (\log \nu)^{-\frac{3}{2}-\varepsilon} \varphi_\nu(x)$$

fast überall im Intervalle $(0 \ldots 1)$ konvergent. Die Folge der c_ν ist aber monoton abnehmend mit dem Limes Null. An den Konvergenzstellen ist daher notwendig

(20) $$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) = O(n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}),$$

was somit fast überall im Orthogonalitätsintervalle der $\varphi_\nu(x)$ gelten muß.

Ferner, ist $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_\nu, \ldots$ irgendeine Folge von reellen Zahlen, so ist nach einem Satze von Pringsheim[15]) die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu^2}{\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^2\right)^{1+2\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

---

[13]) Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris **103** (1886), S. 980–987. Vgl. auch Rademacher, Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren, Math. Zeitschr. **11**, S. 276–288.

[14]) A. a. O.[6]) S. 369, Theorem 2.

[15]) Über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen, Math. Ann. **35** (1890), S. 297–394, insbesondere S. 329.

konvergent. Folglich genügen die Konstanten

$$c_\nu = \frac{a_\nu}{\log\nu\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \qquad (\nu \geqq 2)$$

der Bedingung des Satzes II, und

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu \varphi_\nu(x)}{\log\nu\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

ist wieder fast überall im Orthogonalitätsintervall konvergent. Da überdies

$$\frac{1}{\log\nu\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$$

monoton gegen Null strebt, so gilt wegen des Kroneckerschen Satzes bis auf höchstens einer Nullmenge

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) = O\left(\log n\left(\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu^2\right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right). \tag{21}$$

Diese Formel erreicht für $a_\nu \equiv 1$ die Abschätzung (20) nicht ganz an Schärfe, doch könnte man statt (21) leicht dieselbe Genauigkeit wie in (20) erhalten, wenn man statt des oben angewandten Konvergenzsatzes von Pringsheim gewisse logarithmisch verschärfte Sätze desselben Autors heranzöge[16]).

7. Die eben erhaltenen Größenordnungen gelten auch „wesentlich gleichmäßig", d. h. gleichmäßig in Mengen, deren Maß beliebig wenig unter dem des Orthogonalitätsintervalles liegt. Für (19), d. h. für

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x)}{\log n} = 0$$

folgt dies einfach aus dem schon erwähnten Satze von Egoroff. Weiter möge etwa die wesentliche Gleichmäßigkeit von (20) gezeigt werden. Es sei $A_{k,l}$ die Menge, in der

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\right| < k \cdot n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{3}{2}+\frac{1}{l}} \tag{22}$$

von einem gewissen $n = n(x, k, l)$ an ist. Es ist

$$A_{k,l} \prec A_{k+1,l},$$

[16]) A. a. O. [15]) S. 333.

und wenn

$$A_l = A_{1,l} + A_{2,l} + A_{3,l} + \cdots$$

gesetzt wird, so

$$m A_l = 1,$$

da (20) für $\varepsilon = \frac{1}{l}$ fast überall gilt. Bei vorgeschriebenem positiven δ gibt es also zu l ein k_l, so daß

$$m A_{k_l, l} > 1 - \frac{\delta}{2^{l+1}}$$

ist. Zur Abkürzung sei $A_{k_l, l}$ mit B_l bezeichnet. In B_l gilt also (22) für $k = k_l$ von einem gewissen Index $n = n(x, l)$ an. Nun sei $B_{l,m}$ die Teilmenge von B_l, in der (22) von $n = m$ an gilt. Da

$$B_{l1} + B_{l2} + B_{l3} + \ldots = B_l$$

und

$$B_{lm} \prec B_{l,m+1},$$

so gibt es ein $m = m_l$, so daß

$$m B_{l,m_l} > m B_l - \frac{\delta}{2^{l+1}} > 1 - \frac{\delta}{2^l}$$

ist. Sei $C_l = B_{l,m_l}$ gesetzt. Bilden wir endlich den Durchschnitt

$$C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 \ldots,$$

so ist

$$mC > 1 - \delta.$$

Diese Menge C hat dann die Eigenschaft, daß es zu jedem ε ein $k = k(\varepsilon)$ und ein $n = n(k, \varepsilon)$ gibt, so daß

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\right| < k(\varepsilon) \cdot n^{\frac{1}{2}} (\log n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$$

von $n = n(k, \varepsilon)$ an für alle x, d. h. *gleichmäßig* in C gilt.

IV. Eine allgemeinere Klasse von Funktionensystemen.

8. Herr I. Schur machte mich darauf aufmerkam, daß die bisher erhaltenen Ergebnisse über Konvergenzen und Größenordnungen ja auch in jedem Teilintervall des Orthogonalitätsintervalles fast überall stattfinden und daher auch von einer Funktionsfolge gelten, die in einem gewissen Intervall $(a \ldots b)$ definiert ist und deren Funktionen in einem größeren Intervall so ergänzend definiert werden können, daß die ergänzten Funktionen ein normiertes Orthogonalsystem bilden. Die Charakterisierung solcher zu Orthogonalsystemen ergänzbaren Funktionensysteme leistet der folgende

Satz III (von Schur). *Eine Folge von Funktionen* $f_1(x), f_2(x), \ldots,$ *die im Intervall* $(a \ldots b)$, $0 < a < b < 1$, *gegeben und dort samt ihrem Quadrate im Lebesgueschen Sinne integrabel sind, läßt sich dann und*

nur dann zu einem System von in $(0\ldots 1)$ *normierten Orthogonalfunktionen* $g_1(x), g_2(x), \ldots$ *ergänzen, derart, daß* $f_\nu(x) \equiv g_\nu(x)$ *in* $(a \ldots b)$, *wenn die quadratische Form von unendlich vielen Variablen*

$$F(z_1, z_2, z_3, \ldots) = \int_a^b (z_1 f_1(x) + z_2 f_2(x) + z_3 f_3(x) + \ldots)^2 dx$$

im Hilbertschen Sinne beschränkt ist und die Schranke 1 *besitzt.*

In der Tat, es sei

$$\int_a^b f_\mu(x) f_\nu(x) dx = c_{\mu\nu}.$$

Da nun $f_\mu(x) \equiv g_\mu(x)$ in $(a \ldots b)$ und

$$\int_0^1 g_\mu(x) g_\nu(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}$$

sein soll, so muß

$$\int_0^a g_\mu(x) g_\nu(x) dx + \int_b^1 g_\mu(x) g_\nu(x) dx = \begin{cases} 1 - c_{\mu\mu} & \text{für } \mu = \nu \\ \quad - c_{\mu\nu} & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}$$

sein. Die Formen

$$F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \int_a^b (z_1 f_1 + z_2 f_2 + \ldots + z_n f_n)^2 dx$$

und

$$G_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \int_0^a + \int_b^1 (z_1 g_1 + z_2 g_2 + \ldots + z_n g_n)^2 dx$$

sind nichtnegativ. Ihre Matrizen sind

$$F_n : \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad G_n : \begin{pmatrix} 1 - c_{11} & -c_{12} & \ldots & -c_{1n} \\ -c_{21} & 1 - c_{22} & \ldots & -c_{2n} \\ \vdots & & & \\ -c_{n1} & -c_{n2} & \ldots & 1 - c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) + G_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2,$$

und folglich

$$0 \leqq F_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leqq z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

Da diese Ungleichung für alle n gilt, ist F in der Tat beschränkt und besitzt die Schranke 1.

Ist nun umgekehrt die Form $F = \Sigma c_{\mu\nu} z_\mu z_\nu$ beschränkt und $\leqq \Sigma z_\mu^2$, so ist auch die Form

$$G = \sum z_\mu^2 - \sum c_{\mu\nu} z_\mu z_\nu$$

nichtnegativ. Dann kann man aber nach einem Satz von I. Schur[17]) in den Intervallen $(0 \ldots a)$ und $(b \ldots 1)$ Funktionen $g_\mu(x)$ bestimmen, so daß

$$\int_0^a g_\mu(x) g_\nu(x)\, dx = \int_b^1 g_\mu(x) g_\nu(x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{1-c_{\mu\mu}}{2} & \text{für } \mu = \nu \\ -\dfrac{c_{\mu\nu}}{2} & \text{für } \mu \neq \nu \end{cases}$$

ist. Solche Funktionen $g_\mu(x)$ ergänzen aber nach den schon angestellten Überlegungen die Funktionen $f_\mu(x)$ zu einem im Intervall $(0 \ldots 1)$ normierten Orthogonalsystem.

Für die Anwendung des somit bewiesenen Satzes III auf die früheren Ergebnisse braucht offenbar das Intervall $(a \ldots b)$ nicht notwendig im Innern von $(0 \ldots 1)$ zu liegen und die Schranke der quadratischen Form nicht gerade 1 zu sein. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz IV. *Ist im Intervall* $(a \ldots b)$ *eine Folge von samt ihrem Quadrate integrierbaren Funktionen* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *gegeben und ist*

$$F(z_1, z_2, \ldots) = \int_a^b (z_1 f_1(x) + z_2 f_2(x) + \ldots)^2\, dx$$

eine im Hilbertschen Sinne beschränkte quadratische Form von unendlich vielen Variablen, so gelten fast überall in $(a \ldots b)$ *für die* $f_\nu(x)$ *die Konvergenzaussagen der Sätze* I *und* II *und die Abschätzungen* (19), (20) *und* (21).

V. Lebesguesche Konstanten und Funktionen.

9. Zu einem normierten Orthogonalsystem $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x), \ldots$ führt man nach Lebesgue[18]) die oberen Grenzen $\varrho_n(x)$ von

$$s_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \int_0^1 \varphi_\nu(y)\, f(y)\, dy$$

ein, wobei als $f(y)$ alle quadratisch integrierbaren Funktionen vom Betrage $|f(y)| \leqq 1$ zugelassen sind. Es ist

$$\varrho_n(x) = \text{obere Grenze von} \int_0^1 f(y) \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)\, dy \leqq \int_0^1 \Big| \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y) \Big|\, dy,$$

und diese obere Grenze wird auch wirklich erreicht durch die Funktion

$$f(y) = \operatorname{sign}\Big(\sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(y)\Big),$$

---

[17]) Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen, Math. Zeitschr. 1 (1918), S. 183–207, Satz VII.

[18]) Leçons sur les séries trigonométriques [Paris, 1906], S. 86–87.

in der x als Parameter auftritt. Also ist

$$(23)\qquad \varrho_n(x)=\int_0^1\left|\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)\right|dy.$$

Im Falle der trigonometrischen Funktionen erweisen sich die $\varrho_n(x)$ als von x unabhängig, nnd man spricht daher von den „Lebesgueschen Konstanten". Allgemein aber hätte man die „Lebesgueschen Funktionen" $\varrho_n(x)$ zu betrachten. Es sind für spezielle Orthogonalsysteme viele Untersuchungen über das infinitäre Verhalten der $\varrho_n(x)$ für wachsendes n angestellt werden, und zwar hat man, sobald $\varrho_n(x)$ von x abhängig ist, meist die Konstanten

$$\bar{\varrho}_n=\underset{0\leq x\leq 1}{\text{obere Grenze}}\ \varrho_n(x)$$

betrachtet. Im folgenden sollen nun mit den Methoden der §§ 1 und 3 die Funktionen $\varrho_n(x)$ selbst abgeschätzt werden, was allerdings nur wieder bis auf eine Nullmenge gelingen wird.

Solche Abschätzungen von $\varrho_n(x)$ sind darum von Wert, weil das Wachstum der $\varrho_n(x)$ aufs engste mit der Darstellungskraft von Reihen, die nach den Orthogonalfunktionen des Systems fortschreiten, zusammenhängt. Wenn $f(x)$ eine Funktion ist, die sich durch lineare Verbindungen der $\varphi_\nu(x)$ mit konstanten Koeffizienten (z. B. durch trigonometrische Polynome) beliebig gut approximieren läßt, so möge $f(x)$ als zum „Bereiche" des Orthogonalsystems gehörend bezeichnet werden. Dann kann man zeigen: Sind die Lebesgueschen Funktionen eines Orthogonalsystems gleichmäßig beschränkt, so wird jede Funktion seines Bereiches durch die auf Fouriersche Art gebildete Orthogonalfunktionenreihe dargestellt. Wir beweisen gleich noch mehr. Die Funktion $f(x)$ möge sich durch ein lineares Aggregat der ersten n Funktionen des Orthogonalsystems bis auf eine gewisse Genauigkeit approximieren lassen:

$$(24)\qquad \left|f(x)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|<\varepsilon_n.$$

Wir betrachten die Reihe mit den Fourierkoeffizienten

$$c_\nu=\int_0^1 f(y)\varphi_\nu(y)\,dy.$$

Dann ist

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu\varphi_\nu(x)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\varphi_\nu(x)\right|=\left|\int_0^1\sum_{\nu=1}^{n}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)\left[f(y)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\varphi_\nu(y)\right]dy\right|$$

$$\leq\int_0^1\left|\sum\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)\right|\cdot\left|f(y)-\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu\varphi_\nu(y)\right|dy<\varepsilon_n\cdot\varrho_n(x),$$

also zusammen mit (24)

$$\left|f(x)-\sum c_\nu \varphi_\nu(x)\right| < \varepsilon_n(\varrho_n(x)+1).$$

Hieraus ersieht man, daß auch bei wachsendem $\varrho_n(x)$

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

sein kann, wenn nur die ε_n derart gegen Null streben, daß $\varepsilon_n \varrho_n(x) \to 0$. Auf diese Weise läßt sich also die Theorie der Approximation reeller Funktionen durch Orthogonalfunktionen in den Dienst der Theorie der Reihen von Orthogonalfunktionen stellen.

10. Zur Abkürzung werde die Bezeichnung

$$\sum_{\nu=m+1}^{n} \varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y)=K(m,n)$$

eingeführt.

Um zu einer Abschätzung der $\varrho_n(x)$ zu gelangen, gehen wir aus von

$$(25)\qquad \int_0^1\Big[\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{h=0}^{2^{r-j}-1}\int_0^1 K(h\cdot 2^j, h\cdot 2^j+2^{j-1})^2\,dy\Big]\,dx=\sum_{j=1}^{r-1}\sum_{h=0}^{2^{r-j}-1}2^{j-1}$$

$$=\sum_{j=1}^{r-1}2^{r-j}\,2^{j-1}=(r-1)\,2^{r-1}.$$

In der Doppelsumme unter dem äußeren Integral sind alle möglichen Integrale der Form

$$\int_0^1 K(\alpha,\alpha')^2\,dy$$

addiert, wobei (α,α') Zahlenpaare von folgenden Eigenschaften sind:

$$0 \leqq \alpha < \alpha' < 2^r,\qquad \alpha=h\cdot 2^j,\qquad \alpha'=\alpha+2^{j-1}.$$

Wir schreiben somit kurz für (25)

$$\int_0^1\Big[\sum_{(\alpha,\alpha')}\int_0^1 K(\alpha,\alpha')^2\,dy\Big]\,dx=(r-1)\,2^{r-1}.$$

Hieraus schließt man nun, daß der positive Integrand

$$(26)\qquad \sum_{(\alpha,\alpha')}\int_0^1 K(\alpha,\alpha')^2\,dy<(r-1)\,2^{r-1}\,r^{1+2\varepsilon}$$

in einer Menge S_r sein muß, deren Maß nicht unter $1-\dfrac{1}{r^{1+2\varepsilon}}$ liegt.

Ist nun n eine ganze positive Zahl, $n < 2^r$, so läßt sich n stets als Summe von gewissen der Zweierpotenzen $2^{r-1}, 2^{r-2}, \ldots, 2^1, 2^0$ darstellen und somit $K(0, n)$ als Summe von höchstens r der $K(\alpha, \alpha')$. Wir schreiben etwa

$$K(0, n) = \sum_{(\alpha, \alpha')}^{*} K(\alpha, \alpha'),$$

worin durch $\sum^*$ die Auswahl aus den Paaren (α, α') angedeutet werden möge. Dann ist

$$(\varrho_n(x))^2 = \Big(\int_0^1 |K(0, n)|\, dy\Big)^2 \leqq \Big(\sum_{(\alpha, \alpha')}^{*} \int_0^1 |K(\alpha, \alpha')|\, dy\Big)^2$$

$$\leqq \sum_{(\alpha, \alpha')}^{*} 1 \sum_{(\alpha, \alpha')}^{*} \Big(\int_0^1 K(\alpha, \alpha')\, dy\Big)^2 \leqq r \sum_{(\alpha, \alpha')}^{*} \int_0^1 dy \int_0^1 K(\alpha, \alpha')^2\, dy$$

$$= r \sum_{(\alpha, \alpha')}^{*} \int_0^1 K(\alpha, \alpha')^2\, dy \leqq r \sum_{(\alpha, \alpha')} \int_0^1 K(\alpha, \alpha')^2\, dy.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $n < 2^r$. Die letzte Summe der Ungleichung ist nun in (26) schon abgeschätzt worden, so daß man im ganzen erhält: Auf einer Menge S_r, deren Maß nicht kleiner als $1 - \frac{1}{r^{1+2\varepsilon}}$ ist, gilt

$$\varrho_n(x) < \sqrt{r(r-1)2^{r-1} r^{1+2\varepsilon}} < \sqrt{r^{3+2\varepsilon} \cdot 2^{r-1}}, \tag{27}$$

sobald $n < 2^r$. Es sei nun

$$T_N = S_N \cdot S_{N+1} \cdot S_{N+2} \ldots,$$

dann ist

$$m T_N \geqq 1 - \sum_{r=N}^{\infty} \frac{1}{r^{1+2\varepsilon}},$$

und in T_N gilt (27) für alle $r \geqq N$. Sei nun

$$U = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots,$$

so ist

$$mU = 1.$$

Jeder Punkt x_0 von U ist in einem T_N mit niedrigstem Index $N = N(x_0)$ enthalten, und für $r \geqq N(x_0)$ gilt dann

$$\varrho_n(x_0) < r^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \cdot 2^{\frac{r-1}{2}} \tag{28}$$

bei $n < 2^r$. Zu $n \geqq 2^{N(x_0)-1}$ gibt dann stets ein $r \geqq N(x_0)$ von der Beschaffenheit, daß $n < 2^r \leqq 2n$ ist, so daß also aus (28) folgt:

$$\varrho_n(x_0) < (\log 2n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \cdot \sqrt{n}$$

für x_0 in U und $n \geqq 2^{N(x_0)-1}$. Dieses Ergebnis sprechen wir aus als

Satz V. *Außer höchstens in einer Nullmenge des Orthogonalitätsintervalles gilt für jedes x die Abschätzung der „Lebesgueschen Funktionen“*

$$\varrho_n(x) = O((\log n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \cdot n^{\frac{1}{2}}). \tag{29}$$

Ist übrigens irgendwie bekannt, daß die $\varrho_n(x)$ von x unabhängig sind, so kann man leicht eine etwas bessere Abschätzung erhalten:

$$\varrho_n^2 = (\int_0^1 |K(0, n)|\, dy)^2 = (\int_0^1\int_0^1 |K(0, n)|\, dx\, dy)^2$$

$$\leq \int_0^1\int_0^1 dx\, dy \int_0^1\int_0^1 K(0, n)^2\, dx\, dy = n,$$

$$\varrho_n = O(\sqrt{n}). \tag{30}$$

An einem Beispiele werden wir zeigen, daß diese Größenordnung auch wirklich erreicht werden kann.

VI. Ein spezielles Orthogonalsystem.

11. Man bemerkt leicht, daß man in (20) und (29) die Größenordnung auf $O(n^{\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{3}{2}}(\log\log n)^{1+\varepsilon})$ herunterdrücken könnte, wenn man, ohne den Gang der Rechnung zu ändern, die Reihe $\sum \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}$ als konvergente Reihe von positiven Gliedern anstatt $\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ benutzte. An einem Beispiel wollen wir nun zeigen, daß in (20) gewiß nicht $O(n^{\frac{1}{2}})$, in (29) aber nichts Besseres als $O(n^{\frac{1}{2}})$ stehen darf.

Es sei $e_\nu(x)$ die ν-te Stelle der dyadischen Bruchentwicklung von x, $0 \leqq x \leqq 1$. Als Funktion von x aufgefaßt ist $e_\nu(x)$ stückweise konstant in $(0 \ldots 1)$, und zwar ist $e_\nu(x)$ in den Stücken $\frac{q}{2^\nu} \leqq x < \frac{q+1}{2^\nu}$, $q = 0, 1, \ldots 2^\nu - 1$, abwechselnd 0 und 1. Als System von Orthogonalfunktionen führen wir nun ein

$$\psi_\nu(x) = 2e_\nu(x) - 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{31}$$

Da $\psi_\nu(x)$ im Intervall $(0 \ldots 1)$ abwechseind -1 und $+1$ ist, so ist $\psi_\nu(x)$ in der Tat normiert

$$\int_0^1 \psi_\nu(x)^2\, dx = 1.$$

Ist ferner $\mu < \nu$, so ist

$$\int_0^1 \psi_\mu(x)\, \psi_\nu(x)\, dx = 0,$$

denn in jeder der 2^μ gleichlangen Strecken der Konstanz von $\psi_\mu(x)$ gibt $2^{\nu-\mu}$ gleichlange Strecken abwechselnden Vorzeichens von $\psi_\nu(x)$, so daß die Integrale über die Strecken der Konstanz von ψ_μ einzeln verschwinden

und somit auch das von 0 bis 1 erstreckte Integral. (Das System der $\psi_\nu(x)$ ist übrigens ***kein vollständiges*** Orthogonalsystem, da z. B. $\psi_\lambda(x)\cdot\psi_\mu(x)$ für $\lambda \neq \mu$ zu allen $\psi_\nu(x)$ orthogonal ist. Die Vollständigkeit eines Orthogonalsystems spielt aber in den vorliegenden Untersuchungen überhaupt keine Rolle.)

Nun ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x) = 2\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) - n$$

gleich der Differenz der Anzahl der Einsen und der Nullen in den ersten n Stellen der dyadischen Bruchentwicklung von x. Nach einem Satz von Hardy und Littlewood[19]) kann aber

$$2\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) - n = O(\sqrt{n})$$

nur in einer Nullmenge der x gelten, womit also gezeigt ist, *daß die in einer Menge vom Maße* 1 *gültige Abschätzung* (20) *nicht bis auf* $O(\sqrt{n})$ *herabgedrückt werden kann.*

Übrigens kann man aus (20) umgekehrt schließen, daß

$$2\sum_{\nu=1}^{n} e_\nu(x) - n = O(n^{\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{3}{2}+\varepsilon})$$

außer höchstens in einer Nullmenge der x sein muß, ein Resultat übrigens, das schon auf direktem Wege und schärfer Hardy und Littlewood gefunden haben[20]) und zu dem ich an anderer Stelle auf einem dritten Wege gelangt bin[21]).

12. Die „Lebesgueschen Funktionen" $\varrho_n(x)$ des Systems $\{\psi_\nu(x)\}$, definiert durch

$$\varrho_n(x) = \int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)\right| dy$$

werden sich als von x unabhängig herausstellen, so daß man es in diesem Falle mit „Lebesgueschen Konstanten" zu tun hat.

Da die Funktionen $\psi_\nu(x)$ nur die Werte ± 1 annehmen, so kann $\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x)\psi_\nu(y)$ nur ganzzahlige Werte annehmen. Und zwar muß stets $\sum_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x)\psi_\nu(y) \equiv n \pmod 2$ sein, und man sieht genauer, daß nur die Werte

$$(32)\qquad -n,\ -n+2,\ -n+4,\ \ldots + n-2,\ +n$$

---

[19]) Some Problems of Diophantine Approximation, Acta Mathem. 37 (1914), S. 155–239, insbesondere S. 187, Theorem 1.47, und S. 189, Theorem 1.471.

[20]) A. a. O. Theorem 1.45, S. 185.

[21]) A. a. O. [12]).

möglich sind. Es werde nun $\sum^{n} \psi_\nu(x_0)\,\psi_\nu(y) = K_n(x_0, y)$ bei festem $x = x_0$ als Funktion von y betrachtet. In gleichlangen Intervallen der Länge $\frac{1}{2^n}$ ist sie konstant und nimmt dort einen der eben gekennzeichneten ganzzahligen Werte an. Wir fragen nun nach der Gesamtlänge der Intervalle eines gewissen Funktionswertes. Wir wollen diese Gesamtlängen einfach hintereinander nach der Größenanordnung der in ihnen angenommenen Funktionswerte aufschreiben, wobei wir diese Funktionswerte als ohnehin bekannt nicht mehr zu erwähnen brauchen. Zu $K_1(x_0, y)$ gehören z. B. die Gesamtlängen $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

In jedes der 2^n gleichlangen Teilintervalle, in denen $K_n(x_0, y)$ gewiß konstant ist, fallen gerade zwei gleichlange Teilintervalle von $\psi_{n+1}(x_0)\,\psi_{n+1}(y)$ von entgegengesetztem Wert. Die Hälfte der Intervalle eines konstanten Wertes k von $K_n(x_0, y)$ wird durch Addition von $\psi_{n+1}(x_0)\,\psi_{n+1}(y)$ zu den Intervallen des Wertes $k+1$ der Funktion $K_{n+1}(x_0, y)$ geschlagen, die andere Hälfte fällt den Intervallen des Wertes $k-1$ zu. Daher bietet sich folgendes Schema für die Wertverteilung in den $K_n(x_0, y)$ dar:

$$K_1\colon \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2},$$

$$K_2\colon \quad \frac{1}{2^2}, \quad 2\cdot\frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^2},$$

$$K_3\colon \quad \frac{1}{2^3}, \quad 3\cdot\frac{1}{2^3}, \quad 3\cdot\frac{1}{2^3}, \quad \frac{1}{2^3}$$

und allgemein

$$K_n(x_0, y)\colon \quad \binom{n}{0}\frac{1}{2^n}, \quad \binom{n}{1}\frac{1}{2^n}, \quad \binom{n}{2}\frac{1}{2^n}, \ldots, \binom{n}{n}\frac{1}{2^n}, \tag{33}$$

was man sofort durch vollständige Induktion bestätigt. Diese hiermit charakterisierte Verteilung des Wertevorrats auf die Intervallängen, oder die *relative Häufigkeit* eines Funktionswertes ist von x_0 völlig unabhängig, der *Verlauf* der Funktionen $K_n(x_0, y)$ ist aber erst durch die Anordnung der Intervalle konstanter Werte gegeben und hängt von x_0 ab.

Wenn man den Wertevorrat (32) ins Auge faßt und seine in (33) angedeutete Verteilung hinzunimmt, so erschließt man ohne weiteres

$$\varrho_n(x_0) = \int_0^1 |K_n(x_0, y)|\,dy \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{n\binom{n}{0} + (n-2)\binom{n}{1} + (n-4)\binom{n}{2} + \ldots + \left(n - 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}\right\},$$

womit die schon behauptete Unabhängigkeit der $\varrho_n(x)$ von x nachgewiesen ist[22]).

13. Was nun das Wachstum der ϱ_n betrifft, so zeigt sich zunächst, daß $\varrho_{2m} = \varrho_{2m-1}$ ist, denn

$$\varrho_{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}}\left\{2m\binom{2m}{0} + (2m-2)\binom{2m}{1} + (2m-4)\binom{2m}{2} + \ldots + 2\binom{2m}{m-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\left\{m\binom{2m-1}{0} + (m-1)\left(\binom{2m-1}{0} + \binom{2m-1}{1}\right)\right.$$

$$\left. + (m-2)\left(\binom{2m-1}{1} + \binom{2m-1}{2}\right) + \ldots + \left(\binom{2m-1}{m-2} + \binom{2m-1}{m-1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\left\{(2m-1)\binom{2m-1}{0} + (2m-3)\binom{2m-1}{1} + \ldots + 3\binom{2m-1}{m-2}\right.$$

$$\left. + 1\binom{2m-1}{m-1}\right\} = \varrho_{2m-1}.$$

Dagegen ist

$$\varrho_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0} + (2m-1)\binom{2m+1}{1} + (2m-3)\binom{2m+1}{2}\right.$$

$$\left. + \ldots + 1\binom{2m+1}{m}\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\left\{(2m+1)\binom{2m}{0} + (2m-1)\left(\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1}\right)\right.$$

$$\left. + (2m-3)\left(\binom{2m}{1} + \binom{2m}{2}\right) + \ldots + 1\left(\binom{2m}{m-1} + \binom{2m}{m}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\left\{4m\binom{2m}{0} + (4m-4)\binom{2m}{1} + \ldots + 4\binom{2m}{m-1}\right\} + \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$$

$$= \varrho_{2m} + \frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Da außerdem $\varrho_1 = 1$, so ergibt diese Rechnung die neue Darstellung

$$\varrho_{2m-1} = \varrho_{2m} = 1 + \frac{1}{2^2}\binom{2}{1} + \frac{1}{2^4}\binom{4}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{2m-2}}\binom{2m-2}{m-1},$$

aus der unmittelbar hervorgeht, daß die ϱ_n nie abnehmen bei wachsendem n.

---

[22]) Diese Eigenschaft der Lebesgueschen Funktionen scheint unter den bisher daraufhin untersuchten Systemen nur dem System der trigonometrischen Funktionen [vgl. Lebesgue a. a. O. [17]) und neuerdings vor allem G. Szegö, Über die Lebesgueschen Konstanten bei den Fourierschen Reihen, Math. Zeitschr. **9**, 161–166] und dem Haarschen Orthogonalsystem zuzukommen [Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Diss. Göttingen 1909, auch Math. Ann. **69** (1910), S. 331–371]. Es ist dort nicht besonders hervorgehoben, ergibt sich aber leicht aus den Betrachtungen Kap. III, § 2, daß die Lebesgueschen Funktionen $\varrho_n(x)$ des Haarschen Systems von x und n unabhängig und sämtlich gleich 1 sind.

Für den Zweck einer Abschätzung werde jedoch (34) noch auf eine andere Form gebracht. Es ist

$$\varrho_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0} + (2m-1)\binom{2m+1}{1} + \dots + 1\binom{2m+1}{m}\right\},$$

woraus durch Addition von

$$2m+1 = \frac{2m+1}{2^{2m}} \cdot \frac{2^{2m+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0} + (2m+1)\binom{2m+1}{1} + \dots + (2m+1)\binom{2m+1}{m}\right\}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\varrho_{2m+1} + 2m + 1 &= \frac{1}{2^{2m}}\left\{(4m+2)\binom{2m+1}{0} + 4m\binom{2m+1}{1} + \dots + (2m+2)\binom{2m+2}{m}\right\}\\
&= \frac{1}{2^{2m-1}}\left\{(2m+1)\binom{2m+1}{0} + 2m\binom{2m+1}{1} + \dots + (m+1)\binom{2m+1}{m}\right\}\\
&= \frac{2m+1}{2^{2m-1}}\left\{\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \binom{2m}{2} + \dots + \binom{2m}{m}\right\}\\
&= \frac{2m+1}{2^{2m}}\left\{\binom{2m}{0} + \binom{2m}{1} + \dots + \binom{2m}{m} + \binom{2m}{m+1} + \dots + \binom{2m}{2m}\right\}\\
&\qquad + \frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}\\
&= 2m + 1 + \frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m},
\end{aligned}$$

also

$$\varrho_{2m+1} = \frac{2m+1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}.$$

Dieser Ausdruck für ϱ_n eignet sich gut für eine asymptotische Approximation. Mit Hilfe der Stirlingschen Formel erhält man

$$\varrho_{2m+1} = \frac{2m+1}{2^{2m}} \cdot \frac{(2m)!}{m!\,m!} = \frac{2m+1}{2^{2m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(2m)^{2m+\frac{1}{2}}}{m^{2m+1}} \cdot e^{\frac{\vartheta}{24m} - \frac{\vartheta'}{6m}} \quad (0 \leqq \vartheta, \vartheta' \leqq 1),$$

$$\varrho_{2m+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2m+1}{\sqrt{m}} \cdot e^{\frac{\vartheta}{24m} - \frac{\vartheta'}{6m}} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{m}\,,$$

und endlich, da $\varrho_{2m+1} = \varrho_{2m+2}$,

$$\varrho_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$

Hiermit ist in der Tat gezeigt, daß die Abschätzung (30) *nicht verbessert werden kann.*

14. Das betrachtete Orthogonalsystem besitzt noch eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft. Es gilt nämlich in diesem Falle, hinausgehend über unsern allgemeinen Satz II:

Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(x)$ *konvergiert fast überall in* $(0 \ldots 1)$, *sobald nur* Σc_ν^2 *konvergent ist*[33]).

Der Beweis für diese Tatsache findet sich eigentlich schon in meiner in Anmerkung [12]) zitierten Arbeit (S. 283 f.), er möge hier jedoch, auf den gegenwärtigen Zweck zugeschnitten, in neuer Fassung dargestellt werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $|c_\nu| < 1$ für alle ν annehmen. Nun sei

$$g_\nu(x) = \int_0^x (1 + c_\nu \psi_\nu(t))\,dt \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da der Integrand stets positiv ist, so sind die $g_\nu(x)$ monoton wachsende Funktionen, und zwar ist

$$g_\nu(0) = 0, \quad g_\nu(1) = 1.$$

Sind $0 = x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \ldots, x_{2^\nu}^{(\nu)} = 1$ äquidistante Teilpunkte (die Endpunkte mitgezählt) des Intervalls $(0 \ldots 1)$ von der Anzahl $2^\nu + 1$, so folgt aus der Definition der $\psi_\nu(x)$ unmittelbar

$$\int_0^{x_i^{(\nu)}} \psi_{\nu+1}(t)\,dt = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2^\nu),$$

was

$$g_{\nu+1}(x_i^{(\nu)}) = \int_0^{x_i^{(\nu)}} (1 + c_{\nu+1}\psi_{\nu+1}(t))\,dt = x_i^{(\nu)} \tag{35}$$

zur Folge hat. Zwischen aufeinanderfolgenden Teilpunkten $x_i^{(\nu)}$ und $x_{i+1}^{(\nu)}$ ist ferner $g_\nu(x)$ linear, für $g_\nu(x)$ sind also die Teilpunkte $x_i^{(\nu)}$ Knickpunkte der Funktion. Innerhalb eines der 2^ν gleichlangen Teilintervalle gilt

$$g_\nu'(x) = 1 + c_\nu \psi_\nu(x).$$

Es soll nun mittels der $g_\nu(x)$ eine Folge von gleichfalls monotonen und stetigen Funktionen $f_\nu(x)$ bestimmt werden. Es sei $f_1(x) = g_1(x)$. Ferner soll $f_{\nu+1}(x)$ mit $f_\nu(x)$ an den $2^\nu + 1$ Teilpunkten $x_i^{(\nu)}$ übereinstimmen, deren innere übrigens Knickpunkte von $f_\nu(x)$ sein werden.

---

[33]) Es dürfte nicht genügend bekannt sein, daß auch dem Haarschen Orthogonalsystem diese Eigenschaft zukommt. Denn ist Σc_ν^2 konvergent, so sind nach dem Riesz-Fischerschen Satze die c_ν die Fourierkoeffizienten einer integrierbaren Funktion $f(x)$ in bezug auf das Haarsche System. Die Fourierentwicklung von $f(x)$ nach den Haarschen Funktionen konvergiert aber überall da, wo $f(x)$ gleich der Ableitung seines unbestimmten Integrals ist, also, nach Lebesgue, fast überall (vgl. Haar, a. a. O. [29]), Kap. III, § 2 am Schluß).

Zwischen je zwei aufeinanderfolgende der so festgelegten Punkte von $f_{\nu+1}(x)$ aber soll das zwischen denselben Abszissen liegende Stück von $g_{\nu+1}(x)$ eingespannt werden, indem es in seiner Ordinatenrichtung passend affin verzerrt und verschoben wird. Genauer ausgedrückt: Sind $x_i^{(\nu)}$ und $x_{i+1}^{(\nu)}$ zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte aus der Teilung des Intervalls $(0\ldots1)$ in 2^ν gleiche Teile, und ist $x_i^{(\nu)} \leqq x \leqq x_{i+1}^{(\nu)}$, so soll sein

$$f_{\nu+1}(x) = A\,g_{\nu+1}(x) + B,$$

worin die Konstanten A und B so bestimmt werden, daß der Anschluß an die schon festgelegten Punkte von $f_{\nu+1}(x)$ also an die Punkte $(x_i^{(\nu)}, f_\nu(x_i^{(\nu)}))$ und $(x_{i+1}^{(\nu)}, f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)}))$ stetig erfolgt, was

$$f_{\nu+1}(x) = g_{\nu+1}(x)\,\frac{f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)}) - f_\nu(x_i^{(\nu)})}{g_{\nu+1}(x_{i+1}^{(\nu)}) - g_{\nu+1}(x_i^{(\nu)})} + \frac{f_\nu(x_i^{(\nu)})\,g_{\nu+1}(x_{i+1}^{(\nu)}) - f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)})\,g_{\nu+1}(x_i^{(\nu)})}{g_{\nu+1}(x_{i+1}^{(\nu)}) - g_{\nu+1}(x_i^{(\nu)})}$$

oder wegen (35)

$$(36)\qquad f_{\nu+1}(x) = g_{\nu+1}(x)\,\frac{f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)}) - f_\nu(x_i^{(\nu)})}{x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}} + \frac{f_\nu(x_i^{(\nu)})\,x_{i+1}^{(\nu)} - f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)})\,x_i^{(\nu)}}{x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}}$$

ergibt. Diese für $x_i^{(\nu)} \leqq x \leqq x_{i+1}^{(\nu)}$ definierten Funktionsstücke schließen sich zu einer im ganzen Intervall $(0\ldots1)$ stetigen Funktion $f_{\nu+1}(x)$ zusammen. Zwischen den $2^{\nu+1}+1$ Knick- und Endpunkten von $g_{\nu+1}(x)$ ist $f_{\nu+1}(x)$ differenzierbar, und zwar ist dort

$$f'_{\nu+1}(x) = g'_{\nu+1}(x)\cdot\frac{f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)}) - f_\nu(x_i^{(\nu)})}{x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}} = g'_{\nu+1}(x)\cdot f'_\nu(x).$$

Da noch $f_1(x) = g_1(x)$ festgesetzt war, so ist

$$(37)\qquad f'_\nu(x) = \prod_{\mu=1}^{\nu} g'_\mu(x) = \prod_{\mu=1}^{\nu} (1 + c_\mu\,\psi_\mu(x)),$$

woraus sich auch ergibt, daß alle $f_\nu(x)$ monoton wachsende Funktionen sind. Die $f_\nu(x)$ konvergieren gleichmäßig gegen einen Limes. Zwischen $x_i^{(\nu)}$ und $x_{i+1}^{(\nu)}$ ist nämlich $f_\nu(x)$ linear, da $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_\nu(x)$ in diesem Intervall linear sind; daher läßt sich schreiben für $x_i^{(\nu)} \leqq x \leqq x_{i+1}^{(\nu)}$

$$f_\nu(x) = x\cdot\frac{f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)}) - f_\nu(x_i^{(\nu)})}{x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}} + \frac{f_\nu(x_i^{(\nu)})\,x_{i+1}^{(\nu)} - f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)})\,x_i^{(\nu)}}{x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}}.$$

Also ist wegen (36)

$$f_{\nu+1}(x) - f_\nu(x) = (g_{\nu+1}(x) - x)\,\frac{f_\nu(x_{i+1}^{(\nu)}) - f_\nu(x_i^{(\nu)})}{x_{i+1}^{(\nu)} - x_i^{(\nu)}}$$

oder

$$(38)\qquad f_{\nu+1}(x) - f_\nu(x) = (g_{\nu+1}(x) - x)\cdot f'_\nu(x).$$

Einerseits ist nun

$$g_{\nu+1}(x) - x = c_{\nu+1} \int_0^x \psi_{\nu+1}(t)\,dt,$$

und somit, wegen der Definition der $\varphi_\nu^{(x)}$:

$$|g_{\nu+1}(x) - x| \leqq |c_\nu| \frac{1}{2^{\nu+1}} < \frac{1}{2^{\nu+1}}.$$

Anderseits gibt es, da $|c_\nu| < 1$ und $c_\nu \to 0$, eine Zahl k, $0 < k < 1$, so daß $|c_\nu| < k$ für alle ν. Aus (37) folgt daher, daß $0 < f_\nu'(x) < (1+k)^\nu$ ist, so daß (38) ergibt

$$|f_{\nu+1}(x) - f_\nu(x)| < \frac{(1+k)^\nu}{2^{\nu+1}},$$

woraus man durch Vergleich mit der geometrischen Reihe die gleichmäßige Konvergenz der $f_\nu(x)$ sofort abliest. Es sei

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(x) = f(x);$$

$f(x)$ ist eine monotone und stetige Funktion. Für diese Funktion ist es wesentlich, daß sie mit $f_\nu(x)$ an den Teilpunkten $x_i^{(\nu)}$ übereinstimmt, da die Funktionswerte an diesen Teilpunkten für alle auf $f_\nu(x)$ folgenden Funktionen festbleiben.

Nun gilt der Lebesguesche Satz, daß jede monotone Funktion außer höchstens in einer Nullmenge eine *endliche* Ableitung besitzt. Schließt man nun einen Punkt x in eine Intervallschachtelung ein, die nur ihn als gemeinsamen Punkt besitzt, so kann in x nur dann Differenzierbarkeit herrschen, wenn die Folge der zu jedem Intervall der Schachtelung gebildeten Differenzenquotienten konvergent ist. Jeden Punkt x nun, der nicht gerade der Nullmenge der endlichen dyadischen Brüche angehört, kann man in eine Intervallschachtelung einschließen, deren ν-tes Intervall von zwei Teilpunkten $x_i^{(\nu)}$ und $x_{i+1}^{(\nu)}$ begrenzt wird. Der hierfür gebildete Differenzenquotient von $f(x)$ stimmt aber mit dem von $f_\nu(x)$ überein, der seinerseits gleich $f_\nu'(x)$ ist. Also muß, außer höchstens in einer Nullmenge der x, der Limes von $f_\nu'(x)$ bei $\nu\to\infty$ existieren. Nach (37) heißt das aber, daß

$$(39) \qquad \lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} (1 + c_\nu \psi_\nu(x)) = \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + c_\nu \psi_\nu(x))$$

außer höchstens in einer Nullmenge existiert. Dabei wäre dieses unendliche Produkt, entgegen einer gebräuchlichen Terminologie, auch dann konvergent zu nennen, wenn sein Limes Null ist.

Nun war aber $\sum c_\nu^2$ oder, was dasselbe ist, $\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \psi_\nu^2(x)$ als konvergent vorausgesetzt. Überall, wo (39) konvergent ist, muß daher

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(x) \tag{40}$$

entweder konvergieren oder bestimmt gegen $-\infty$ divergieren. Letzteres kann aber auch nur auf einer Nullmenge geschehen. Denn $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-c_\nu)\psi_\nu(x)$ ist eine Reihe von demselben Typ wie (40) und kann daher höchstens auf einer Nullmenge gegen $+\infty$ divergieren. *Somit ist* (40) *fast überall im Intervall* $(0\ldots 1)$ *konvergent.*

Das hier betrachtete Orthogonalsystem teilt mit dem Haarschen die Eigenschaft, aus unstetigen, stückweise konstanten Funktionen zu bestehen. Im übrigen zeigen aber die beiden Systeme ein durchaus verschiedenes Verhalten: Das Haarsche System ist vollständig, seine Funktionen verschwinden auf beliebig langen Teilstrecken des Intervalls und besitzen sämtlich nur einen Vorzeichenwechsel, die Funktionen sind bei hohem Index beliebig großer Werte fähig und die Lebesgueschen Konstanten des Systems sind sämtlich gleich 1; unser System dagegen ist unvollständig, seine Funktionen nehmen den Wert Null nicht an, sind beliebig vieler Zeichenwechsel fähig, bleiben gleichmäßig beschränkt, und die Lebesgueschen Konstanten wachsen in der größtmöglichen Ordnung. Die Tatsache, daß zwei so verschiedene Systeme schon bei Konvergenz von Σc_ν^2 fast überall konvergente Reihen liefern, legt aufs neue die Frage nahe, ob nicht unser Satz II einer weiteren Verschärfung fähig sei, und insbesondere auch die Frage nach dem maximalen Maß der Divergenzmenge einer Fourierreihe.

(Eingegangen am 8. 10. 1921.)

Allgemeine independente Auflösung der Integralgleichungen erster Art.

Von

Ch. H. Müntz in Göttingen.

Die Methode von Picard[1])-Lauricella[2]) zur Bestimmung der (quadratisch) „kleinsten" Lösung der Integralgleichung erster Art

$$(1)\,^{3)} \qquad \int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

bei vorgeschriebenen, quadratisch summablen $K(s,t)$ — auch *un*symmetrische Kerne sind zugelassen — und $f(s)$,[4]) läßt insofern noch viel zu wünschen übrig, als sie die explizite Kenntnis *sämtlicher Eigenfunktionen* $\varphi_\nu(s)$ des zugehörigen, übrigens definiten, linksiterierten Symmetralkernes

$$(1\text{a}) \qquad K^2(s,t) = \int K(r,s)\,K(r,t)\,dr$$

voraussetzt: damit wird aber die voraufgehende Auflösung eines Problems notwendig, das i. a. wesentlich komplizierter ist als das gegebene (§ 6).

Diesem Umstande sucht Herr Vergerio[5]) dadurch zu begegnen, daß er statt der $\varphi_\nu(s)$ die in der Schmidtschen Dissertation (Göttingen 1905) benutzten iterierten Funktionenkomplexe heranzieht, aus denen die $\varphi_\nu(s)$ erst nacheinander bestimmt werden können; eine eigentliche Vereinfachung wird so indessen nicht erreicht.

---

[1]) Comptes Rendus 1909; Rendiconti Circ. Mat. Palermo 1910.

[2]) Atti Acc. Lincei 1909, 1911.

[3]) Die festen endlichen Integrationsgrenzen lassen wir überall fort.

[4]) Es hat sich in der Literatur der stehende Ausdruck von einer „nebst ihrem Quadrate summablen Funktion $f(s)$" ausgebildet: eine jedenfalls reichlich pleonastische Wendung, da aus der Existenz von $\int f(s)^2\,ds$, bei endlichen Grenzen, auf Grund der auch für Lebesguesche Integrale gültigen Schwarzschen Ungleichung sofort zuerst die Konvergenz von $\int |f(s)|\cdot 1\,ds$ folgt — daraus aber auch diejenige von $\int f(s)\,ds$ selbst, sobald nur die *Vorzeichenfunktion* $\operatorname{sign} f(s)$ meßbar ist, was hier [auch für $K(s,t)$] immer mitgemeint sein soll.

[5]) Atti Acc. Lincei 1915.

Im folgenden geben wir zwei verschiedene Methoden zur vollständigen Auflösung von (1) auf *unabhängigem* Wege, d. h. ohne jede Kenntnis der Invarianten von $K^2(s, t)$.

Die erste dieser Methoden (§§ 1—2) eignet sich insbesondere für die Bestimmung aller Lösungen der *homogenen* Gleichung (§ 1):

$$\int K(s, t)\varphi(t)dt = 0, \tag{2}$$

die zweite (§ 3) ist mehr der inhomogenen Gleichung (1) angepaßt; in beiden wird für die Existenz der Lösungen je einmal der bekannte Fischer-Rieszsche Satz herangezogen.

Man könnte versucht sein, analog zum entsprechenden *algebraischen* Problem, nach einem *lösenden Kern* $H(s, t)$ für (1) zu fragen, wie dies bekanntlich bei den Integralgleichungen *zweiter* Art gelingt: eine solche Methode existiert hier aber i. a. *nicht* (§ 5), außer nämlich, wenn $K(s, t)$ nur *endlich* viele linear unabhängige Funktionen von s umfaßt (und dann auch genau ebenso viele in t (l. c.)).

Dagegen läßt sich das Verfahren von §§ 1—3 auch bei den Integralgleichungen zweiter Art anwenden (§ 4).

§ 1.

Die homogene Gleichung.

Es sei

$$\alpha_0(s), \alpha_1(s), \ldots, \alpha_n(s), \ldots \tag{3}$$

irgendein fest gewähltes *vollständiges* System von normierten Orthogonalfunktionen des betrachteten Intervalls, und es möge die homogene Gleichung (2) zur Lösung stehen.

Man hat jetzt für jedes $n \geqq 0$:

$$0 = \int \alpha_n(s)ds \int K(s, t)\varphi(t)dt. \tag{4}$$

Werden hier alle Ausdrücke unter den Integralzeichen durch ihre absoluten Werte ersetzt, so ergibt die zweimalige Anwendung der Schwarzschen Ungleichung — da auch $\int \varphi(t)^2 dt$ mit meßbarem $\operatorname{sign}\varphi(t)$ existieren soll *) — ohne weiteres die absolute Konvergenz von (4), so daß eine Vertauschung der Integrationsfolge statthaft wird. Man erhält so:

$$0 = \int \varphi(t)dt \int \alpha_n(s)K(s, t)ds, \tag{5}$$

also, nach Einführung von

$$\beta_n(t) = \int \alpha_n(s)K(s, t)ds, \tag{6}$$

---

*) Die hier gegebenen Methoden lassen sich übrigens auch auf einfach summierbare Kerne und $(1+p)$-fach summierbare Lösungen $(p > 0)$ übertragen.

das System von Bedingungen:

(6a) $$0 = \int \varphi(t) \beta_n(t) dt; \quad n \geqq 0.$$

Erfüllt umgekehrt eine passende Funktion $\varphi(t)$ dieses letzte System, so kann man rückwärts aus (4) schließen, daß die Funktion $\int K(s, t) \varphi(t) dt$ inbezug auf das vollständige Grundsystem (3) lauter verschwindende Entwicklungskoeffizienten besitzt, also — wie verlangt — tatsächlich (bis etwa auf eine Menge vom Maße Null) verschwindet.

Um nun alle $\varphi(t)$ gemäß (6a) zu bestimmen, ersetzen wir das aus (6) explizit bekannte System der $\beta_n(t)$ durch das zugehörige orthogonalisierte und normierte (kürzer: *orthonormierte*):

(7) $$\beta_0^*(t), \beta_1^*(t), \ldots, \beta_n^*(t), \ldots,$$

wobei zwecks späteren Gebrauchs (§ 2) jede etwa auftretende identische *Null* ausdrücklich an ihrer Stelle aufgeführt werden soll. Die Bedingungen (6a) sind dann offenbar äquivalent mit

(7a) $$0 = \int \varphi(t) \beta_n^*(t) dt; \quad n \geqq 0.$$

Ist nun das System $\beta_n^*(t)$, was durch Zerlegung nach den Grundfunktionen $\alpha_k(s)$ stets festgestellt werden kann, ein *vollständiges*, so kann nur $\varphi(t) \equiv 0$ als Lösung von (7a) und (2) gelten. Anderenfalls aber läßt sich bekanntlich ein *Ergänzungssystem* von orthonormierten Funktionen (Schmidt, Fischer-Riesz)

(8) $$\gamma_0^*(t), \gamma_1^*(t), \ldots, \gamma_n^*(t), \ldots,$$

i. a. auf mannigfache Weise, derart bestimmen, daß es mit den $\beta_n^*(t)$ zusammen ein *vollständiges* Grundsystem bildet.

Jede dem Raume dieser $\gamma_n^*(t)$ angehörende Funktion $\gamma(t)$ ergibt nun eine Lösung von (2), und umgekehrt — womit das homogene Problem erledigt erscheint.

Das System (8) braucht dabei durchaus nicht explizit ausgewertet zu werden, was wegen der i. a. sehr bedingten „Konvergenz im Mittel" bei der Anwendung des Fischer-Rieszschen Korrespondenzsatzes nicht unwesentlich ist. Von den Funktionen $\gamma_n^*(t)$ kennt man nämlich zunächst nur ihre Fourierkoeffizienten γ_{nk} in bezug auf die $\alpha_k(t)$, und jedes $\gamma(t)$ ist seinerseits durch die Koeffizienten γ_n in bezug auf die $\gamma_n^*(t)$ derart gegeben, daß $\sum_n^{0\ldots\infty} \gamma_n^2$ konvergiert. Alsdann sind aber die Koeffizienten von $\gamma(t)$ in bezug auf die $\alpha_k(t)$ in absolut konvergenter Weise gegeben durch $\sum_n^{0\ldots\infty} \gamma_n \gamma_{nk}$; die Bestimmung der zugehörigen Funktion verlangt daher nur eine *einmalige* Anwendung des Korrespondenzsatzes.

§ 2.

Ausdehnung auf $f(s) \not\equiv 0$.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen von § 1 möge jetzt $f(s) \not\equiv 0$ eindeutig charakterisiert werden durch seine Koeffizienten:

$$a_n = \int f(s) \alpha_n(s) ds. \tag{9}$$

Nach Einsetzen aus (1) erhält man:

$$\left\{\begin{aligned} a_n &= \int \alpha_n(s) ds \int K(s,t) \varphi(t) dt \\ &= \int \varphi(t) dt \int \alpha_n(s) K(s,t) ds = \int \varphi(t) \beta_n(t) dt, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

und wieder ergibt sich rückwärts, daß $\int K(s,t) \varphi(t) dt$ nach Erfüllung von (10) die gleichen Koeffizienten inbezug auf die $\alpha_n(s)$ besitzen würde wie $f(s)$, mit dem es dann also zusammenfallen muß.

Nun lassen sich die orthonormierten Funktionen $\beta_n^*(t)$ explizit durch lineare Aggregate der entsprechenden n ersten $\beta_k(t)$ in eindeutiger Weise ausdrücken, und umgekehrt[7]. Das Bedingungssystem (10) für $\varphi(t)$ geht so in ein äquivalentes über:

$$b_n^* = \int \varphi(t) \beta_n^*(t) dt, \tag{10a}$$

worin die b_n^*, $\beta_n^*(t)$ bekannt sind, und man hat jetzt zweierlei zu fordern:

1. für jedes $\beta_n^*(t) \equiv 0$ muß $b_n^* = 0$ sein,

2. $\sum\limits^{0\ldots\infty} b_n^{*2}$ muß konvergieren.

Dann aber ist die „kleinste" Lösung $\varphi(t)$ nach dem Korrespondenzsatze eindeutig definiert durch die im Mittel konvergente Entwicklung

$$\varphi(t) \sim \sum^{0\ldots\infty} b_n^* \beta_n^*(t), \tag{11}$$

und jede weitere Lösung ergibt sich natürlich durch Addition irgendeiner Funktion $\gamma(t)$, die die *homogene* Gleichung befriedigt.

§ 3.

Spezielle Grundsysteme.

Ist $f(s) \not\equiv 0$, so kann es ohne Einschränkung der Allgemeinheit als *normiert* angesehen werden; auf mannigfache Weise läßt sich dann erreichen, daß $f(s)$ selbst an die Spitze eines vollständigen orthonormierten Grundsystems $\alpha_n^*(s)$ tritt, ohne daß man den Korrespondenzsatz anzuwenden braucht. Man kann z. B. $f(s)$ einem bekannten Grundsystem $\alpha_n(s)$ vor-

[7]) Die bekannten entsprechenden Ausdrücke schreiben wir hier nicht erst aus.

anstellen und dann orthonormieren; weit einfacher aber erscheint das folgende *direkte* Verfahren.

Für $f(s) = \alpha_0(s)$ bzw. $f(s) = -\alpha_0(s)$ erfüllt schon das Schema (3) von $\alpha_1(s)$ ab das gestellte Verlangen; in allen anderen Fällen ist der erste Entwicklungskoeffizient a_0 von $f(s)$ inbezug auf das System (3) absolut kleiner als 1. Nunmehr stellt jede der beiden Folgen:

$$(\overline{12})\quad \bar{\alpha}_0^*(s) = f(s);\qquad \bar{\alpha}_\nu^*(s) = -\alpha_\nu(s) + \frac{a_\nu}{1+a_0}[\alpha_0(s) + f(s)];$$

$$(12)\quad \alpha_0^*(s) = f(s);\qquad \alpha_\nu^*(s) = \alpha_\nu(s) + \frac{a_\nu}{1-a_0}[\alpha_0(s) - f(s)];\qquad (\nu > 0),$$

ein Grundsystem dar, das statt (3) genommen werden darf — die a_ν sind dabei wieder durch (9) definiert.

Es genügt, den Beweis für die zweite der Folgen (12) zu führen. Es ist:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \alpha_0^*(s)\alpha_\nu^*(s)\,ds = a_\nu + \frac{a_\nu}{1-a_0}(a_0 - 1) = 0;\\ &\int \alpha_\nu^*(s)\alpha_{\nu'}^*(s)\,ds = -\frac{a_\nu}{1-a_0}a_{\nu'} - \frac{a_{\nu'}}{1-a_0}a_\nu + \frac{a_\nu}{1-a_0}\,\frac{a_{\nu'}}{1-a_0}(1 - 2a_0 + 1) = 0;\\ &\int \alpha_\nu^*(s)^2\,ds = 1 - 2\frac{a_\nu}{1-a_0}a_\nu + \left(\frac{a_\nu}{1-a_0}\right)^2(1 - 2a_0 + 1) = 1; \end{aligned}\right.$$

d. h. das betrachtete System ist jedenfalls orthonormiert, und nur seine Vollständigkeit steht noch in Frage. Man kann dieselbe direkt für jede (quadratisch summable) Funktion $g(s)$ feststellen; einfacher ist es aber, zu zeigen, daß jede der Funktionen $\alpha_n(s)$ von (3) dem Raume aller $\alpha_n^*(s)$ angehört, was ebenfalls schon hinreicht.

Die Fourierkoeffizienten von $\alpha_0(s)$ inbezug auf das neue Grundsystem der $\alpha_n^*(s)$ sind offenbar: a_0, $\frac{a_\nu}{1-a_0}(1 - a_0) = a_\nu$, mit der vollen Quadratsumme 1, da es die Koeffizienten des normierten $f(s)$ inbezug auf alle $\alpha_n(s)$ sind; $\alpha_0(s)$ liegt somit im Raume (12); für die übrigen $\alpha_\nu(s)$ wird dies dann selbstverständlich, da man aus (12) hat:

$$(12\text{a})\qquad \alpha_\nu(s) = \alpha_\nu^*(s) + \frac{a_\nu}{1-a_0}[f(s) - \alpha_0(s)].\ [8]$$

Inbezug auf das neue Grundsystem (12) hat $f(s)$ offenbar die Koeffizienten:

$$(9^*)\qquad a_0^* = 1;\quad a_\nu^* = 0,\quad \nu > 0;$$

---

[8]) Geometrisch gesprochen, entstehen die Systeme $(\overline{12})$, (12) aus dem ersten Grundsystem $\alpha_n(s)$ durch einfache Spiegelung an den *Winkelhalbierenden* von $\alpha_0(s)$ und $f(s)$.

setzt man also

$$\int \alpha_n^*(s) K(s,t)\, ds = \delta_n(t), \qquad n \geqq 0, \tag{14}$$

wodurch das System der $\delta_n(t)$ explizit definiert wird, so hat man:

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \int f(s)^2 ds = \int f(s)\, ds \int K(s,t)\varphi(t)\, dt \\ &= \int \varphi(t)\, dt \int f(s) K(s,t)\, ds = \int \varphi(t)\,\delta_0(t)\, dt; \\ 0 &= \int f(s)\alpha_\nu^*(s)\, ds = \int \alpha_\nu^*(s)\, ds \int K(s,t)\varphi(t)\, dt \\ &= \int \varphi(t)\, dt \int \alpha_\nu^*(s) K(s,t)\, ds = \int \varphi(t)\,\delta_\nu(t)\, dt. \end{aligned}\right. \tag{14a}$$

Es genügt also, ein passendes $\varphi(t)$ den letzteren Gleichungen gemäß zu bestimmen. Wird aber das System der $\delta_\nu(t)$, ohne $\delta_0(t)$, durch das äquivalente orthonormierte ersetzt:

$$\delta_1^*(t), \ldots, \delta_\nu^*(t), \ldots, \tag{15}$$

worin die $\delta_\nu^*(t)$ demnach ebenfalls alle bekannt sind, so gehen die Beziehungen (14a) in die gleichwertigen über:

$$1 = \int \varphi(t)\,\delta_0(t)\, dt; \qquad 0 = \int \varphi(t)\,\delta_\nu^*(t)\, dt. \tag{15a}$$

Nun läßt sich $\delta_0(t)$ durch Berechnung seiner Koeffizienten

$$\delta_\nu = \int \delta_0(t)\,\delta_\nu^*(t)\, dt \tag{16}$$

in zwei eindeutig bestimmte Summanden zerlegen:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{\delta}_0(t) &\sim \sum^{1\ldots\infty} \delta_\nu \delta_\nu^*(t), \\ \bar{\delta}_0^*(t) &= \delta_0(t) - \bar{\delta}_0(t). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Ist hier die zu allen übrigen $\delta_\nu^*(t)$ orthogonale Restfunktion $\bar{\delta}_0^*(t)$ *identisch gleich Null*, so hat man

$$\delta_0(t) = \bar{\delta}_0(t), \qquad \int \varphi(t)\,\delta_0(t) = 0, \tag{17a}$$

im Widerspruch zu (15a); die vorgelegte Gleichung (1) ist dann also *nicht lösbar*. Hat man aber $\bar{\delta}_0^*(t) \not\equiv 0$,

$$\int \bar{\delta}_0^*(t)^2\, dt = \delta^2 > 0, \tag{18}$$

so findet man:

$$\frac{1}{\delta^2}\int \bar{\delta}_0^*(t)\,\delta_0(t)\, dt = \frac{1}{\delta^2}\int \bar{\delta}_0^*(t)^2\, dt = 1; \tag{18a}$$

es ist daher mit

$$\varphi(t) = \frac{1}{\delta^2}\,\bar{\delta}_0^*(t) \tag{19}$$

die kleinste Lösung von (1) gegeben, zu der dann jede Lösung $\gamma(t)$ der

homogenen Gleichung (2) hinzugefügt werden kann; zur Erledigung der letzteren nach § 1 kann natürlich auch das hier benutzte Grundsystem $\alpha_n^*(t)$ herangezogen werden; der Ergänzungsraum aus allen $\gamma_n^*(t)$ fällt nach der Normierung von $\bar{\delta}_0^*(t)$ zu

$$(19\text{a})\qquad \delta_0^*(t) = \frac{1}{\delta_0}\,\bar{\delta}_0^*(t), \qquad \delta_0 = \delta > 0,$$

mit der Ergänzung zum Raume aller $\delta_n^*(t)$, $n \geqq 0$, zusammen.

Die durch (18) gegebene *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Auflösbarkeit von (1) läßt sich expliziter ausschreiben:

$$(20)\qquad \delta^2 = \int\left\{\int f(s)K(s,t)\,ds\right\}^2 dt - \sum_{\nu}^{0\ldots\infty}\left\{\int \delta_0(t)\,\delta_\nu^*(t)\,dt\right\}^2 > 0;$$

da wegen (18) δ^2 niemals < 0 ausfallen kann, so ist offenbar $\delta^2 = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung für die *Nicht*auflösbarkeit von (1).

Die eventuelle Eindeutigkeit der Lösung ist dann und nur dann verbürgt, wenn der Raum aller $\delta_n^*(t)$ *vollständig* ausfällt; dazu ist hinreichend und notwendig, daß man aus (12) für jedes $\alpha_m^*(t)$, $m \geqq 0$, habe:

$$(21)\qquad 1 = \sum_{n}^{0\ldots\infty}\left\{\int \alpha_m(t)\,\delta_n^*(t)\,dt\right\}^2.$$

§ 4.

Integralgleichungen zweiter Art.

Die Auflösung der klassischen Neumann-Fredholmschen Integralgleichung:

$$(22)\qquad \varphi(s) - \lambda\int K(s,t)\,\varphi(t)\,dt = f(s)$$

kann durch die Anwendung der oben gegebenen Methoden bedeutend vereinfacht werden; es stellt sich heraus, daß man 1. den Kern $\bar{K}(s,t)$ mitsamt $f(s)$ und $\varphi(s)$ nur auf einen Teilraum ζ zu beschränken braucht, der durch die Projektion des Raumes aller $\int \alpha_n(s)K(s,r)\,ds$ auf den Raum aller $\int K(r,t)\alpha_n(t)\,dt$ gegeben ist ($n = 0, 1, 2, \ldots$), welch letzteren Funktionenräume*) bei Kernen, die in t bzw. in s *nicht* abgeschlossen sind, selber schon Teilräume sind; 2. man braucht auch in ζ nur Kerne von der speziellen halbfiniten Gestalt

$$(23)\qquad \bar{K}(s,t) \sim \sum_{n}^{0\ldots\infty}\alpha_n(s)\sum_{p}^{0\ldots n+1} c_{np}\,\alpha_p(t), \qquad \sum_{n,p} c_{np}^2 < \infty$$

*) Dieselben stimmen übrigens mit denjenigen der adjungierten Eigenfunktionen $\varphi_n(r)$ bzw. $\psi_n(r)$ überein.

zu betrachten, die dann bei der Anwendung unendlich vieler Variablen auf *zeilen*finite lineare Gleichungen führen (Toeplitz).

Zunächst setzen wir in üblicher Weise $\varphi(s) = f(s) + \lambda\psi(s)$ in (22) ein, worauf

$$(24) \qquad \psi(s) - \lambda\int K(s,t)\,\psi(t)\,dt = \int K(s,t)\,f(t)\,dt = \overset{+}{f}(s)$$

allein zu lösen ist; $\psi(s)$ wird so zur Summe zweier Funktionen aus dem Raume ξ der $\xi(s) = \int K(s,t)\,\alpha(t)\,dt$ und ist demnach selbst in ξ enthalten.

Inbezug auf ein abgeschlossenes orthonormiertes Grundsystem $\xi_n^*(s)$ in ξ [10]) hat man jetzt:

$$(25) \qquad K(s,t) \sim \sum^{0\ldots\infty} \xi_n^*(s)\,\eta_n(t), \quad \sum^{0\ldots\infty} \eta_n(t)^2 < \infty;$$

jedes $\eta_n(r)$ seinerseits kann explizit in eindeutiger Weise zerlegt werden in seine Projektion $\zeta_n(r)$ auf den Raum aller $\xi_n^*(r)$ und den Orthogonalrest $\omega_n(r)$, so daß

$$(25\,\mathrm{a}) \qquad K(s,t) \sim \sum^{0\ldots\infty} \xi_n^*(s)\,\zeta_n(t) + \sum^{0\ldots\infty} \xi_n^*(s)\,\omega_n(t)$$

wird; beim erlaubten formalen Einsetzen [11]) in (24) verschwindet aber der auf die $\omega_n(t)$ bezügliche Teil identisch, da $\psi(t)$ bereits selbst dem Raume der $\xi_n^*(t)$ angehört.

Die Orthonormierung der $\zeta_n(t)$ zu $\zeta_n^*(t)$ führt auf einen *Teil*raum ($\leqq$) des $\xi_n^*(t)$-Raumes, die $\xi_n^*(t)$ kann man sich also von vornherein als Gesamtheit der $\zeta_n^*(t)$ vermehrt um den ergänzenden Orthogonalteil $\bar{\xi}_n(t)$ denken; sowohl $\psi(s)$ wie $\overset{+}{f}(s)$, letzteres explizit, können wir in ihre Komponenten in bezug auf die $\zeta_n^*(t)$ und die orthogonalen Reste zerlegen; nun wird:

$$(26) \qquad \left\{\begin{aligned} K(s,t) &\sim \sum^{0\ldots\infty} [\zeta_n^*(s) + \bar{\xi}_n(s)]\,\zeta_n(t) + (\omega) = \\ &= K^*(s,t) + \bar{K}(s,t) + (\omega); \\ \overset{+}{f}(s) &= f^*(s) + \bar{f}(s); \qquad \psi(s) = \psi^*(s) + \bar{\psi}(s); \end{aligned}\right.$$

$$(26^*) \qquad \psi^*(s) - \lambda\int K^*(s,t)\,\psi^*(t)\,dt = f^*(t);$$

$$(26\,\mathrm{a}) \qquad \bar{\psi}(s) = \bar{f}(s) + \lambda\int \bar{K}(s,t)\,\psi^*(t)\,dt,$$

also bleibt nur (26*) allein aufzulösen. Hierbei ist, nach (26):

$$(26\,\mathrm{b}) \qquad K^*(s,t) \sim \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \alpha_{mn}\,\zeta_n^*(s)\,\zeta_m^*(t), \quad \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \alpha_{mn}^2 < \infty;$$

---

[10]) Nicht zu jedem $\xi(s)$ dieses Raumes gibt es dann (Picard) ein zugehöriges $\alpha(s)$: das bleibt hier aber ohne Belang.

[11]) Es handelt sich nur um Angaben über die Fourierkoeffizienten.

da aber die Wahl der „Hauptachsen“ $\zeta_n^*(s)$ im erhaltenen Raume ζ an sich freisteht, so kann man schrittweise so verfahren, daß, von $\zeta_0^*(s)$ [etwa $= f^*(s)$] ausgehend, jedes weitere $\zeta_\nu^*(s)$ durch Orthogonalisation von $\eta_{\nu-1}^*(s) = \int \zeta_{\nu-1}^*(s) K^*(s,t)ds$ in bezug auf $\zeta_0^*(s), \ldots, \zeta_{\nu-1}^*(s)$ genommen werde — beim eventuellen Abbrechen gehe man ebenso von einem neuen $\zeta^*(s)$ aus, bis man etwa wieder auf 0 oder den früheren Raum kommt, usf. Der Kern $K(s,t)$ wird so in natürliche orthogonale Bestandteile zerlegt [12]), inbezug auf welche allein die Gleichung (24) betrachtet zu werden braucht; $f(s)$ wird hierbei mitzerlegt, $\varphi(s)$ aber folgt von selber in die gleichen Teilräume — bei jedesmaligem endlichen Abbrechen wird die zugehörige Teillösung sogar *elementar* bestimmbar. Jedenfalls werden nun die Bestimmungsgleichungen für die Fourierkoeffizienten von $\psi^*(s)$ zeilenfinit, auch brauchen sie nur inbezug auf das *erste* Teilsystem $\zeta_0^*(s) = f^*(s), \ldots, \zeta_\nu^*(s), \ldots$, aufgestellt zu werden — die übrigen entsprechen den *homogenen* Integralgleichungen (22), die für allgemeine λ nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

§ 5.

Nichtexistenz lösender Kerne.

Das algebraische Analogon zu (1) ist das lineare System $f_s = \sum_t^{1\ldots n} K_{st}\varphi_t$, mit der Auflösung in regulären Fällen — auf die man durch Reduktion immer zurückkommen kann — durch $\varphi_t = \sum_r^{1\ldots n} H_{tr}\varphi_r$. Es fragt sich daher, ob für (1) ebenfalls eine Lösung von der Form

$$(27)\qquad \varphi(t) = \int H(t,r) f(r)dr,$$

eventuell mit passend abgeänderten endlichen Integrationsgrenzen a', b' für r allein, gefunden werden kann, ähnlich wie bei (22) ein solcher Übergang vom Endlichen aus bekannt ist (Fredholm, Hilbert). Setzt man

$$(27\text{a})\qquad \int K(s,t) H(t,r)dt = G(s,r),$$

so müßte demnach ein $G(s,r)$ existieren, für welches bei *beliebigem* $f(s)$

$$(27\text{b})\qquad \int G(s,r) f(r)dr = f(s)$$

wäre, sofern nur $f(s)$ in (1) eine Lösung zuläßt, also dem Raume ξ aller $\xi_n(s) = \int K(s,t)\,\alpha_n(t)dt$ angehört. Ist nun dieser letztere Raum *endlichdimensional*, d. h. stellt $K(s,t)$ bei beliebigen t nur endlichviele linear unabhängige Funktionen von s dar, so besitzt ξ ein endliches orthonor-

[12]) Die Fredholmsche Nennerdeterminante $D(\lambda)$ ist das Produkt der so entstehenden Teildeterminanten $D_p(\lambda)$, der lösende Kern von $K(s,t)$ die Summe der lösenden Kerne seiner Teile, usf.

miertes Grundsystem $f_1^*(s), \ldots, f_n^*(s)$, und die Lösung des Problems wird elementar: man hat nur zu setzen

$$(27\,\mathrm{c})\qquad G(s,r)=\sum_{\nu}^{1\ldots n} f_\nu^*(s)\, f_\nu^*(r), \qquad H(t,r)=\sum_{\nu}^{1\ldots n} h_\nu(t)\, f_\nu^*(r)$$

und alle $h_\nu(t)$ direkt aus (27a) zu bestimmen, indem man dort noch

$$(27\,\mathrm{d})\qquad K(s,t)=\sum_{\nu}^{1\ldots n} f_\nu^*(s)\, g_\nu(t), \qquad g_\nu(t)=\int f_\nu^*(r)\, K(r,t)\, dr$$

einführt — die direkte Auflösung[13]) versagt dann nur für den Fall der linearen *Abhängigkeit* aller $g_\nu(t)$; letztere läßt sich aber stets vermeiden, indem man dann in (27d) einfach von vornherein die $g_\nu(t)$ orthonormiert und andere $f_\nu^*(s)$ in entsprechend verringerter Anzahl einführt. Von eigentlichem Interesse ist also nur der Fall $n=\infty$; die Fourierkoeffizienten G_{pq} von $G(s,r)$ in bezug auf alle $f_p^*(s)$, $f_q^*(t)$ sind dann wegen (27b) alle gleich 1 für $p=q$, und sonst gleich 0; folglich wird

$$(28)\qquad \iint G(s,t)^2\, ds\, dt=\sum G_{pq}^2=\infty,$$

ein quadratisch summables $G(s,t)$ existiert also *nicht*[14]), demnach auch kein entsprechendes $H(s,t)$, w. z. b. w. Gerade dieses Fehlen der lösenden Kerne zwingt hier im allgemeinen Falle (§§ 1—3) zur Anwendung des Fischer-Rieszschen Korrespondenzprinzips: $\varphi(t)$ kann dabei auch bei stetigen $K(s,t)$ effektiv bloß quadratisch summabel ausfallen.

§ 6.

Vergleich mit der Auflösung von $K^2(s,t)$.

Die Picard-Lauricellasche Methode (s. o.), bei der zuletzt natürlich ebenfalls der allgemeine Korrespondenzsatz benutzt wird, verlangt für (1)

---

[13]) Sind $g_{\nu q}$ die Fourierkoeffizienten von $g_\nu(t)$ in bezug auf das orthonormierte System $g_\nu^*(t)$, so sind die entsprechenden Koeffizienten von $h_\nu(t)$ für das gleiche System einfach gegeben durch das Schema der kontragredienten Matrix $\|h_{\nu q}\| = \|g_{q\nu}\|^{-1}$.

[14]) Für $f_\nu^*(s)=\cos \nu s$, $K(s,t)=\cos st$, $0=s,t\leq 2\pi$, hat man z. B. $\pi G(s,t) \sim \sum_{\nu}^{1\ldots\infty} \cos \nu s \cos \nu t \sim \frac{1}{2}\sum_{\nu}^{1\ldots\infty}[\cos \nu(s+t)+\cos \nu(s-t)]$, was aber stets *divergiert*. Allerdings gilt hier für $0\leq r,s,t\leq\infty$, trotz der Divergenz von $\int_0^{\infty}\cos st \cos rt\, dr$, die Fouriersche Integrallösung $\frac{\pi}{2}H(t,r)=\cos rt$, natürlich ohne quadratische Integrabilität; bei unendlichen Intervallen können also unter Umständen lösende Kerne existieren, auch wenn $K(s,t)$ in bezug auf s nicht finit ist. Nach dem Integralsatz von Cauchy gilt eine ähnliche Bemerkung auch für komplexe *geschlossene* Wege.

die voraufgehende explizite Bestimmung aller Eigenfunktionen des definiten linksiterierten symmetrischen Kernes $K^2(s,t)$. Der wohl einfachste Weg zur wirklichen Ausführung einer solchen Bestimmung dürfte der folgende, vom Verfasser an anderer Stelle gegebene sein [15]): man gehe von einem vollständigen orthonormierten Grundsystem $\alpha_n(s)$ aus und bestimme nacheinander die Systeme

$$\alpha_n^{(N)}(s) = \int K^2(s,t)\,\alpha_n^{(N-1)}(t)\,dt \qquad (N > 0) \tag{29}$$

mit ihren jeweiligen Orthonormierungen

$$\alpha_0^{*(N)}(s),\ \alpha_1^{*(N)}(s),\ \ldots,\ \alpha_n^{*(N)}(s),\ \ldots, \tag{29*}$$

dann ***konvergiert*** das Schema (29*) ***gleichmäßig*** gegen ein Grenzsystem

$$\varphi_n(s) = \lim_{N=\infty} \alpha_n^{*(N)}(s), \tag{30}$$

das genau ***alle*** gesuchten Eigenfunktionen darstellt.

Dieses Verfahren, das übrigens bei nichtdefiniten symmetrischen Kernen nur wenig zu modifizieren wäre (l. c.), erfordert im allgemeinen einen sehr viel größeren Arbeitsaufwand, als etwa dasjenige für (1) in § 3; die hier gegebenen ***direkten*** Methoden der Auflösung einer beliebigen Integralgleichung erster Art dürften daher tatsächlich eine wesentliche Lücke der bisherigen Theorie ausfüllen.

Göttingen, den 10. November 1921.

---

[15]) Vgl. Göttinger Nachrichten, 1917: „Zur expliziten Bestimmung ... der Eigenfunktionen“, sowie die Ausführung dieser Note in den Warschauer Prace Matematyczno-Fizyczne, 1918: „Das Hauptachsenproblem ... der symmetrischen Integralgleichungen“.

(Eingegangen am 9. 12. 1921.)

Über ein Beispiel von L. Vietoris zu den Hausdorffschen Umgebungsaxiomen.

Von

Heinrich Tietze in Erlangen.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) über „Stetige Mengen“ hat L. Vietoris für die bekannten Hausdorffschen Axiome des Umgebungsbegriffs (s. u.) folgendes Beispiel angegeben: Die „Punkte“ des betrachteten „topologischen Raumes“ R seien die ganzen rationalen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Eine Umgebung $\mathfrak{U}(x)$ des Punktes x bestehe aus allen Zahlen y, so daß $y \equiv x \pmod{m}$, wo m eine die betreffende Umgebung kennzeichnende ganze positive Zahl ist. Offenbar genügt dieses Beispiel den Hausdorffschen Axiomen[2]):

(A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung $\mathfrak{U}(x)$; jede $\mathfrak{U}(x)$ enthält x.

(B) Zu zwei Umgebungen $\mathfrak{U}'(x), \mathfrak{U}''(x)$ von x gibt es eine in ihrem Durchschnitt enthaltene $\mathfrak{U}'''(x)$.

(C) Liegt y in $\mathfrak{U}(x)$, dann gibt es eine in $\mathfrak{U}(x)$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}(y)$ von y.

(D) Zu zwei verschiedenen Punkten $x \neq y$ gibt es punktfremde Umgebungen $\mathfrak{U}(x), \mathfrak{U}(y)$.

Bekannte Sätze der Zahlentheorie erhalten in diesem „Raum“ eine eigenartige Gestalt, z. B.[3]): Die Menge der Primzahlen hat als (einzige) Häufungsstellen $+1$ und -1.

So merkwürdig dieser Raum R auf den ersten Blick erscheint, so ist es doch möglich, in ihm *Entfernungen* einzuführen, aus denen der Umgebungsbegriff ableitbar ist, und zwar Entfernungen, die der bekannten Drei-

---

[1]) Monatshefte für Math. u. Phys. **31** (1921), S. 173—204.

[2]) Überdies, wie Vietoris, l. c. S. 174, bemerkt, den Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiomen (E) und (F). Vgl. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), S. 213, 263.

[3]) Vietoris, l. c. Anm. 3.

ecksungleichung genügen[4]). Hierzu werde mit $(\gamma(n))!$ die größte in n als Faktor enthaltene Zahl der Folge $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, \ldots$ bezeichnet[5]) und als Entfernung der Zahlen x, y die Zahl $\overline{xy} = \frac{1}{\gamma(y-x)}$ eingeführt $\left(\frac{1}{\gamma(0)} = 0\right)$. In jeder Menge, die alle $\overline{xy} < \varrho$ $(\varrho > 0)$ erfüllenden Punkte y umfaßt, ist dann eine $\mathfrak{U}(x)$ und umgekehrt in jeder $\mathfrak{U}(x)$ eine Menge $\overline{xy} < \varrho$ enthalten[6]). Bedeutet ferner $\operatorname{Max}(u, v)$ die kleinste Zahl, die $\geqq u$ und $\geqq v$ ist, und $\operatorname{Min}(u, v)$ die größte Zahl $\leqq u$ und $\leqq v$, so ist

$$\gamma(a+b) \geqq \operatorname{Min}(\gamma(a), \gamma(b))$$

und für irgend drei Zahlen x, y, z

$$\overline{xy} = \frac{1}{\gamma(y-x)} \leqq \frac{1}{\operatorname{Min}(\gamma(y-z), \gamma(z-x))} = \operatorname{Max}(\overline{zy}, \overline{xz}),$$

also erst recht, wie behauptet:

$$(*) \qquad \overline{xy} \leqq \overline{xz} + \overline{zy}.$$

Das Beispiel von Vietoris läßt sich leicht auf ein d-dimensionales Punktgitter R übertragen, wenn unter einer Umgebung eines Punktes x irgendein x enthaltendes d-dimensionales Teilgitter von R verstanden wird. Werden dann alle den Nullpunkt o von R enthaltenden d-dimensionalen Teilgitter in eine abzählbare Anordnung $G_1 = R, G_2, G_3, \ldots$ gebracht, so werde mit Γ_ν das den Gittern $G_1, G_2, \ldots, G_\nu$ gemeinsame d-dimensionale Gitter bezeichnet (oder für $\nu > 1$ allgemein irgendein in diesem und in $\Gamma_{\nu-1}$ enthaltenes d-dimensionales Gitter), ferner mit $\gamma(y)$ der größte Index ν, für welchen der Punkt y dem Gitter Γ_ν angehört. Bedeutet dann $y - x$ den Gitterpunkt der zu o so liegt, wie y zu x (Vektorsubtraktion) und wird die Entfernung $\overline{xy} = \frac{1}{\gamma(y-x)}$ gesetzt, so gelten obige Bemerkungen unverändert auch für diesen Fall, aus dem der frühere durch einfache Spezialisierung für $d = 1$ hervorgeht.

Erlangen, 14. 1. 1922.

---

[4]) Und zwar nicht nur in der allgemeineren von M. Fréchet, Rend. d. Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), S. 18, für die „classes (V)“ geforderten, sondern in der üblichen schärferen, unter (*) angegebenen Form. R gehört also zu den von Fréchet als „classes (E)“ bezeichneten Räumen.

[5]) An Stelle von $k!$ könnte irgendein Vielfaches M_k des kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $1, 2, \ldots, k$ treten, so daß $M_1 = 1$, $M_{k+1} \equiv 0 \pmod{M_k}$.

[6]) Die $\mathfrak{U}(x)$ und die durch $\overline{xy} < \varrho$ gegebenen Mengen $\mathfrak{U}(x; \varrho)$ bilden demnach im Sinne Hausdorffs (l. c. S. 261) „gleichwertige“ Umgebungssysteme.

(Eingegangen am 16. 1. 1922.)

Über uneigentliche Somen.

Von

H. Beck in Bonn.

1. In einer Arbeit „Über lineare Somenmannigfaltigkeiten“[1]) hat sich der Verfasser u. a. mit dem Begriff des reellen uneigentlichen Soma des Euklidischen Raumes befaßt. Während einem eigentlichen Soma ein Koordinatensystem zugeordnet werden kann, d. h. ein geordnetes Tripel dreier Speere durch einen Punkt, wird ein uneigentliches Soma als geordnetes Tripel (orientierter) *Richtungen* gedeutet, eine Auffassung, die sich schon bei Study[2]) findet.

Nun hat kürzlich E. Kosiol eine interessante Deutung der reellen uneigentlichen Somen des hyperbolischen Raumes gegeben[3]). Diesen lassen sich durchaus lückenlos umkehrbar eindeutig zuordnen die *orientierten Gewinde*. Ein Gewinde wird dabei orientiert genannt, sobald seine Hauptachse es ist.

Es fragt sich nun, ob Spuren dieses Zusammenhanges zwischen uneigentlichen Somen und Gewinden sich in den Euklidischen Raum hinüber gerettet haben. Diese Frage werden wir bejahen und dann das pathologische Element aufdecken, welches diesen noch vorhandenen Zusammenhang seines praktischen Nutzens beraubt. Daß die anzustellenden Überlegungen trotzdem von erheblicher Tragweite sind, wird am Schluß angedeutet.

2. Das Soma hat acht homogene Koordinaten

$$\mathfrak{X}_0 : \mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{123} : \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12}\,,$$

[1]) Math. Annalen 81 (1920).

[2]) Sitzungsberichte der Berl. Math. Ges. 12 (1913), S. 50.

[3]) Grundlagen der Kinematik im hyperbolischen Raum. Diss. Bonn 1922.

die der quadratischen Relation genügen

$$(1)\qquad \frac{1}{2}(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{123} + \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

Es heißt *eigentlich*, solange der Ausdruck $(\mathfrak{X}/\mathfrak{X}) \neq 0$ ist.

Dabei ist hyperbolisch:

$$(2\,\mathrm{h})\qquad (\mathfrak{X}/\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 - \varkappa^2\mathfrak{X}_{123}^2 - \varkappa^2\mathfrak{X}_{23}^2 - \varkappa^2\mathfrak{X}_{31}^2 - \varkappa^2\mathfrak{X}_{12}^2,$$

Euklidisch:

$$(2\,\mathrm{E})\qquad (\mathfrak{X}/\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}_0^2 + \mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2,$$

wenn das absolute Polarsystem durch die Formeln gegeben ist:

Punktkoordinaten: $x_0y_0 - \varkappa^2x_1y_1 - \varkappa^2x_2y_2 - \varkappa^2x_3y_3 = 0.$

Ebenenkoordinaten: $-\varkappa^2\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0 + \mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_3 = 0.$

(h): $\varkappa > 0.$ (E): $\varkappa = 0.$

Durch „Verkürzung"[4]), d. h. durch Fortlassen der beiden Koordinaten $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{X}_{123}$ entsteht aus dem Soma $\mathfrak{X}$ (im allgemeinen) das Gewinde $\overline{\mathfrak{X}}$.

$$\mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12},$$

wobei der Querstrich über $\mathfrak{X}$ an den Verkürzungsprozeß erinnern soll. Entsprechend in den beiden Symbolen $(\overline{\mathfrak{X}}\overline{\mathfrak{X}})$ und $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}})$, von denen also das erste beispielsweise nur drei Glieder abkürzt.

Insbesondere bestimmt das *uneigentliche* Soma $\mathfrak{X}$ das Gewinde $\overline{\mathfrak{X}}$

stets eindeutig.

Alleinige Ausnahme das Soma $0:0:0:0:1:0:0:0.$

3. Das Gewinde $\overline{\mathfrak{X}}$ werde in bekannter Weise auf einen Punkt eines R_5 abgebildet. In diesem liegt die singularitätenfreie M_4^2 von der Gleichung $(\overline{\mathfrak{X}}\overline{\mathfrak{X}}) = 0$, sowie die $\mathfrak{M}_4^2$ von der Gleichung $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) = 0$. Letztere ist

singularitätenfrei; Es gibt ein Inneres $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) > 0$ und Äußeres $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) < 0$.

mit singulärer Ebene behaftet. Die Form $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}})$ ist positiv definit.

Ein Punkt $\overline{\mathfrak{X}}$ des R_5, der nicht auf $\mathfrak{M}_4^2$ liegt, bestimmt in bezug auf diese einen Polar-R_4, und dieser wieder in bezug auf M_4^2 einen Pol, der mit $\overline{\mathfrak{X}}$ immer durch eine Gerade verbunden werden kann. Sie trifft M_4^2 in zwei Punkten

einer außerhalb, der andere innerhalb $\mathfrak{M}_4^2$.

der eine liegt auf der $\mathfrak{M}_4^2$, der andere nicht.

---

[4]) Lineare Somenmannigfaltigkeiten, S. 189.

Der zweite dieser Punkte wird als *Hauptachse* $\overline{\mathfrak{A}}$ des Gewindes $\overline{\mathfrak{X}}$ gedeutet, der erste als Nebenachse. Diese Herleitung verdient vor einer gleichfalls sehr eleganten, wohl von Study herrührenden den Vorzug, da sie auch für Räume anderer Dimensionszahl anwendbar ist. Sie findet sich zuerst bei W. Kniebes[5]) ($n = 8$) und hat kürzlich auch für $n = 4$ eine überraschende Anwendung bei H. Lücking[6]) gefunden.

Die Hauptachse $\overline{\mathfrak{A}}$ des Gewindes $\overline{\mathfrak{X}}$ ermittelt sich demnach als

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{A}_{0i} &= \sigma\mathfrak{X}_{0i} - \varkappa^2\tau\mathfrak{X}_{kl}, \\ \mathfrak{A}_{kl} &= \sigma\mathfrak{X}_{kl} + \tau\mathfrak{X}_{0i}, \end{aligned} \qquad (i, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2)$$

wobei σ und τ aus den beiden Bedingungen

$$(4)\qquad (\overline{\mathfrak{A}}\overline{\mathfrak{A}}) = (\sigma^2 - \varkappa^2\tau^2)(\overline{\mathfrak{X}}\overline{\mathfrak{X}}) + 2\sigma\tau(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) = 0,$$

$$(5)\qquad (\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{A}}) = (\sigma^2 - \varkappa^2\tau^2)(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) - 2\varkappa^2\sigma\tau(\overline{\mathfrak{X}}\overline{\mathfrak{X}}) > 0$$

bis auf einen Proportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt sind, im Euklidischen Falle sogar rational. ($(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) \neq 0$.)

4. Für die Hauptachse des zum uneigentlichen Soma $\mathfrak{X}$ gehörigen Gewindes $\overline{\mathfrak{X}}$ hat man *hyperbolisch*

$$(6\text{h})\qquad \mathfrak{A}_{0i} = \varkappa^2\mathfrak{X}_{123}\mathfrak{X}_{0i} - \varkappa^2\mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{kl}, \qquad \mathfrak{A}_{kl} = \varkappa^2\mathfrak{X}_{123}\mathfrak{X}_{kl} + \mathfrak{X}_0\mathfrak{X}_{0i},$$

also $\sigma = \varkappa^2\mathfrak{X}_{123}$, $\tau = \mathfrak{X}_0$. Da aber σ und τ aus (4) und (5) bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt sind, so haben wir hier eine erste lineare Gleichung für $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{X}_{123}$.

$$(7)\qquad \sigma\mathfrak{X}_0 - \varkappa^2\tau\mathfrak{X}_{123} = 0.$$

Weiter ist dann

$$(\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{A}}) = \varkappa^2(\mathfrak{X}_0^2 + \varkappa^2\mathfrak{X}_{123}^2)^2 = \varkappa^2(\mathfrak{X}_{123}\sigma + \mathfrak{X}_{01}\tau)^2.$$

Durch die willkürliche Festsetzung

$$(8)\qquad \sqrt{\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{A}}} = \varkappa(\tau\mathfrak{X}_0 + \sigma\mathfrak{X}_{123})$$

hat man eine zweite lineare Gleichung für $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{X}_{123}$. Da jetzt die Hauptachse des Gewindes $\overline{\mathfrak{X}}$ orientiert ist, läßt sich also aussprechen:

Durch das orientierte Gewinde $\overline{\mathfrak{X}}$ ist ein uneigentliches Soma $\mathfrak{X}$ eindeutig bestimmt. Im Falle, daß das Gewinde $\overline{\mathfrak{X}}$ selbst uneigentlich ist, $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) = 0$, $(\overline{\mathfrak{X}}\overline{\mathfrak{X}}) = 0$, versagen die Gleichungen (4) und (5). Trotzdem wird eindeutig $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_{123} = 0$. Das Gewinde ist zu sich selbst entgegen-

---

[5]) Über das Hypersoma. Diss. Bonn 1921.

[6]) Ein zweidimensionales Analogon zur Plückerschen Liniengeometrie. Diss. Bonn 1922.

gesetzt orientiert und besteht aus den Treffgeraden einer Tangente der absoluten Fläche.

Das uneigentliche Soma hat noch einen „Mittelpunkt", nämlich einen der Endpunkte der Hauptachse des zugeordneten Gewindes.

5. Das Wesentliche an dieser Herleitung ist, daß es in der hyperbolischen Geometrie gelungen ist, die Gleichungen

$$(9\mathrm{h}) \qquad \mathfrak{X}_0^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{123}^2 = -(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}), \quad 2\,\mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_{123} = -(\overline{\mathfrak{X}}\overline{\mathfrak{X}})$$

eindeutig nach $\mathfrak{X}_0$ und $\mathfrak{X}_{123}$ aufzulösen. Im Euklidischen Falle reduzieren sie sich auf[7])

$$(9\mathrm{E}) \qquad \mathfrak{X}_0^2 = -\mathfrak{X}_{01}^2 - \mathfrak{X}_{02}^2 - \mathfrak{X}_{03}^2, \quad \mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_{123} = -\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12}.$$

Ist $(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}) = \mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 \neq 0$, so ist alles in Ordnung. Nach Verfügung über $\sqrt{-(\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}})}$ ergibt sich $\mathfrak{X}_0$ eindeutig, und dann folgt auch $\mathfrak{X}_{123}$ eindeutig. Die Hauptachse (6 h) wird aber in der Grenze nicht die Euklidische Hauptachse des Gewindes, ***sondern deren absolute Polare***, also die Nebenachse. Diese enthält auch noch (in einem ihrer Schnittpunkte mit dem absoluten Kegelschnitt) den Mittelpunkt des uneigentlichen Gewindes. Durch ihn wird also die Nebenachse orientiert und ***damit auch die Euklidische Hauptachse***. Diese entsteht durch Grenzübergang aus der hyperbolischen Nebenachse

$$(10\mathrm{h}) \qquad \mathfrak{A}_{0i} = \mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_{0i} + \varkappa^2 \mathfrak{X}_{123} \mathfrak{X}_{kl}, \qquad \mathfrak{A}_{kl} = \mathfrak{X}_0 \mathfrak{X}_{kl} - \mathfrak{X}_{123} \mathfrak{X}_{0i}.$$

Für diese ist

$$(\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{A}}) = -(\mathfrak{X}_0^2 + \varkappa^2 \mathfrak{X}_{123}^2)^2,$$

so daß in der Grenze nach Beseitigung eines gemeinsamen Faktors $\mathfrak{X}_0$ herauskommt

$$\sqrt{\overline{\mathfrak{A}}/\overline{\mathfrak{A}}} \to \sqrt{\overline{\mathfrak{X}}/\overline{\mathfrak{X}}}.$$

6. Nun treten zwei Übelstände auf. Das uneigentliche Soma $\mathfrak{X}$ kann im Euklidischen Raum für $\mathfrak{X}_0 \neq 0$ nicht reell sein. Der Zusammenhang, wonach einem uneigentlichen Soma auch des Euklidischen Raumes ein orientiertes Gewinde zugeordnet werden kann, besteht also noch, ***aber er tritt nur im imaginären Gebiet auf***.

Ist aber $\mathfrak{X}_0 = 0$, so läßt sich $\mathfrak{X}_{123}$ aus der zweiten Gleichung (9 E) nicht mehr, auch für reelle Somen nicht, berechnen; beide Gleichungen (9 E) werden jetzt ($\mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{03} = 0$) identisch erfüllt. In diesem Falle kann man ein und demselben (reellen uneigentlichen) Gewinde $0:0:0:\mathfrak{X}_{23}:\mathfrak{X}_{31}:\mathfrak{X}_{12}$ zuordnen ∞^1 uneigentliche reelle Somen $0:0:0:0:\mathfrak{X}_{123}:\mathfrak{X}_{23}:\mathfrak{X}_{31}:\mathfrak{X}_{12}$, und

[7]) Abgesehen von dem schon oben erwähnten Ausnahmefall.

umgekehrt, abgesehen von dem bereits mehrfach erwähnten Ausnahmefall. In diesen Fällen muß es einstweilen bei der Studyschen Deutung bleiben.

7. Damit ist die Angelegenheit indessen noch nicht erledigt; man kann den ∞^3 uneigentlichen Somen des Euklidischen Raumes zuordnen die Minimalgeraden des Euklidischen Raumes ($\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{03} = 0$).

In der Tat ist das restlos möglich, wenn man die „Minimalgerade" durch zehn homogene Koordinaten darstellt; sie wird dann besser Minimalkreis genannt. Es hängt das damit zusammen, daß auf einer singularitätenfreien M_3^2 die Polarebenen der Erzeugenden (und damit diese selbst) ein quaternäres Gebiet bilden. Darüber demnächst mehr.

Sodann wird die Aufmerksamkeit auf die orientierten Gewinde als Raumelemente gelenkt. Diese lassen sich in äußerst einfacher Weise wohlbekannten Figuren zuordnen, die der Anschauung auch nicht die geringste Schwierigkeit bieten, nämlich den orientierten Linien- bzw. Flächenelementen, die damit ebenfalls Bilder uneigentlicher Somen sind. Auch dieser Gegenstand, der auch für die Liesche Kugelgeometrie fruchtbringend ist, soll demnächst zur Behandlung kommen.

Bonn, den 27. Dezember 1921.

(Eingegangen am 30. 12. 1921).

Druckfehlerberichtigung

zu dem Aufsatz von E. Landau »Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Bieberbach „Über die Verteilung der Null- und Einsstellen analytischer Funktionen" (Math. Ann. 85)« in Band 86, S. 158–160.

S. 159 Formel (2) rechts vom Gleichheitszeichen lies $\bar{\xi}_\lambda$ statt ξ_λ.

Der Druckfehler ist erst entstanden, nachdem der Verfasser das Imprimatur erteilt hatte.

Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen.

Von

Hans Jonas in Berlin.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Das den beiden Hauptteilen voraufgeschickte, einleitende *I. Kapitel* behandelt das Auftreten von *Geweben*[1]) oder *Kurvennetzen ohne Umwege* im Zusammenhang mit solchen Flächen, die, ohne selber Linienflächen zu sein, auf Linienflächen abwickelbar sind. Insbesondere wird in § 1 der meines Wissens bislang nicht bekannte Satz bewiesen, daß *der eine Mantel der Evolutenfläche eines von Asymptotenlinien gebildeten Gewebes stets Biegungsfläche eines geraden Konoids oder, was auf dasselbe hinausläuft, einer Binormalenfläche ist.*

Das *II. Kapitel* umfaßt den ersten Hauptteil der vorliegenden Untersuchungen und entwickelt eine Anzahl geometrischer Beziehungen, die sich an die isometrische Deformation des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids knüpfen. Den Ausgangspunkt bildet dabei ein Problem, zu dem die Betrachtung des Bonnetschen Ausdruckes für das Krümmungsmaß einer Fläche den Anlaß liefert: Die Frage nach *den rechtwinkligen Kurvennetzen auf einer Fläche, denen die charakteristische Eigenschaft zukommt, daß in jedem Knotenpunkt die geometrischen Ableitungen der beiden geodätischen Krümmungen, jede genommen längs der Kurve der anderen Schar, den gleichen Wert haben.* Wir zeigen, daß auf der *Kugel* die Ermittlung dieser Orthogonalsysteme, die wir als Systeme Γ bezeichnen, sich als Tschebyscheffsches Bekleidungsproblem für eine gewisse quadratische Differentialform darstellt, und schließen daraus bereits auf die analytische Äquivalenz unserer Aufgabe mit dem Biegungsproblem für das Paraboloid $z = xy$. Die weiteren Entwicklungen, die sich an dieses Ergebnis knüpfen, führen zu einer Konstruktion der Biegungsfläche des Paraboloids auf Grund eines als bekannt vorausgesetzten Γ-Netzes auf der Kugel und fördern im übrigen eine Reihe anschaulich-geometrischer Tatsachen zutage, bei denen die Mannigfaltigkeit der Beziehungen zu anderen differentialgeometrischen Problemen überrascht. Man gelangt dabei zu verschiedenen Arten spezieller Gewebe. Die Biegungsfläche des Paraboloids $z = xy$ im Verein mit den beiden den Biegungslinien der Geradenscharen entsprechenden Evolventenflächen, die Träger asymptotischer Gewebe sind, bildet einen besonderen Fall des eingangs erwähnten Theorems von § 1. Die beiden Evolventenflächen sind gleichzeitig spezielle Vertreter einer neuen Klasse von Flächen, der Flächen P, auf die ich 1919 durch eine Mitteilung in der Berliner Mathematischen Gesellschaft aufmerksam gemacht habe. Diese Flächen P bedeuten ein Gegenstück zu den von Demoulin und

[1]) Die nicht unmittelbar zum Verständnis der Einleitung erforderlichen Literaturangaben finden sich weiter unten bei den betr. Paragraphen.

Tzitzéica betrachteten R-Flächen und lassen wie diese Transformationen zu, die durch W-Kongruenzen vermittelt werden.

Von besonderem Interesse erscheint auch der Umstand, daß das Γ-Netz der Kugel zusammen mit einem bestimmten zweiten Kurvennetz der gleichen Art, das dieselbe Kugel bedeckt, einem geschlossenen viergliedrigen Zyklus Laplacescher Transformationen angehört. Die beiden innerhalb dieses Zyklus zwischen die Γ-Netze geschalteten konjugierten Systeme, die übrigens *assoziiert* zu den aymptotischen Geweben der Evolventenflächen sind, gehören als spezielle Repräsentanten zur Klasse der von Guichard zuerst bemerkten und von Calapso eingehend untersuchten konjugierten Systeme G, die dadurch ausgezeichnet sind, daß ihre beiderseitigen Laplaceschen Transformierten Orthogonalsysteme, d. h. also Krümmungsliniennetze sind. Wie alle G-Systeme mit gleichen Invarianten, so stellen auch die hier betrachteten wiederum Gewebe dar. Zu jedem dieser beiden G-Systeme mit gleichen Invarianten existiert ein paralleles G-System mit ebenfalls gleichen Invarianten. Die Träger dieser beiden neuen G-Systeme bilden die Brennflächenmäntel einer W-Kongruenz; als Laplacesche Transformierte erhält man zwei Paare äquidistanter Flächen, die die beiden Γ-Netze der Kugel zu sphärischen Bildern der Krümmungslinien haben.

Es sei schließlich erwähnt, daß die Ergebnisse dieses II. Kapitels sich in gewissem Sinne auch als eine Ergänzung zum Schlußkapitel vom 3. Bande des Darbouxschen Werkes (*Leçons sur la théorie générale des surfaces*) auffassen lassen, wo die Beziehungen zwischen den Minimalflächen des elliptischen Raumes und den Flächen von konstanter Krümmung des euklidischen Raumes entwickelt werden.

Der zweite Hauptteil unserer Untersuchungen, der den Inhalt des *III. Kapitels* bildet, betrifft die eigentümliche Bedeutung, die den Flächen von konstanter Krümmung bei der Bestimmung der auf die Paraboloide abwickelbaren Flächen zukommt. Ein solcher Zusammenhang ist seit den grundlegenden Arbeiten von Thybaut[2]) und Calapso[3]) bekannt, an die sich Bianchis umfangreiche Abhandlungen anschlossen. Auf den Ergebnissen Calapsos fußend, vermochte Bianchi[4]), indem er von der Bäcklundschen Transformation der Flächen von konstanter Krümmung ausging, die durch W-Kongruenzen vermittelten Transformationen auch für den Bereich der

[2]) Thybaut, Sur la déformation du paraboloïde. Ann. de l'Éc. Norm. Sup. (3) **14** (1897), p. 45.

[3]) Calapso, Sulla deformazione delle quadriche. Palermo Rend. **16** (1902), p. 297.

[4]) Bianchi, Sulla deformazione dei paraboloidi. Annali di Mat. (3) **9**, p. 247; Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sui paraboloidi. Annali di Mat. (3) **12**, p. 263.

auf die Paraboloide abwickelbaren Flächen zu spezialisieren. Wir erinnern daran, daß die dabei gewonnenen geometrischen Prinzipien sich als verallgemeinerungsfähig erwiesen und von Bianchi[5]) auf die Biegungsflächen der allgemeinsten Mittelpunktsfläche 2. Grades ausgedehnt wurden, daß aber die durch diese Erweiterung zum Abschluß geführte Theorie sich nicht mehr mittels der Flächen von konstanter Krümmung beherrschen ließ.

Der Verwandtschaft zwischen den Biegungsflächen der Paraboloide und den Flächen von konstanter Krümmung hat bisher insofern ein gewisser geheimnisvoller Zug angehaftet, als Ausgangspunkt für die Bestimmung einer Biegungsfläche eines Paraboloids nicht eine im Raume gegebene Fläche von konstanter Krümmung, sondern lediglich ein Integral θ ihrer Differentialgleichung

$$\theta_{\alpha\alpha} + \theta_{\beta\beta} + e^{2\theta} - e^{-2\theta} = 0 \tag{I}$$

zu sein schien. Diese Differentialgleichung spielt dabei die Rolle der Integrabilitätsbedingung eines Systems totaler, linearer und homogener Differentialgleichungen, dessen vier durch eine inhomogene quadratische Relation verbundenen Integralfunktionen dann die Biegungsfläche lediglich intrinsek, d. h. durch ihre flächentheoretischen Fundamentalgrößen bestimmen[6]).

Die Ergebnisse von Kapitel III dürften nun ganz wesentlich dazu beitragen, den gedachten Punkt der Theorie aufzuklären, nämlich durch die Feststellung, daß *man die Biegungsfläche des Paraboloids in einer bis auf Translationen völlig bestimmten räumlichen Orientierung relativ zu einem Paar von Flächen konstanter Krümmung erhalten kann.* Wir beschränken uns hier zunächst auf den Fall des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, das wir überdies in Kapitel III als imaginäres Paraboloid $z = ixy$ voraussetzen; d. h. wir betrachten *reelle* Biegungsflächen vom Typus

$$ds^2 = (1 - v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1 - u^2)dv^2, \tag{II}$$

für die wir den Nachweis führen, daß sie sich unmittelbar mit Hilfe von Quadraturen aus Paaren reeller, durch die Hazzidakissche Transformation verbundener Flächen von konstanter positiver Krümmung konstruieren lassen. Vorweg sei übrigens bemerkt, daß ein Umstand, der der Auf-

[5]) Vor allem: Bianchi, Lezioni di geometria differenziale **3** (1909).

[6]) Die Berechnung der laufenden Koordinaten der Biegungsfläche läßt sich auf die Konstruktion „harmonischer Lösungsquadrupel" des erwähnten Systems von Differentialgleichungen zurückführen (Bianchi, Ricerche sui sistemi tripli coniugati etc., Annali di Mat. (3) **23** (1914), p. 135). Die betreffenden Formeln für die Koordinaten stimmen ihrem Wesen nach mit denjenigen überein, die wir im Falle des Paraboloids $z = xy$ in § 5 der vorliegenden Abhandlung aufstellen. Die Bianchische Arbeit ist mir übrigens erst nachträglich zugänglich geworden.

klärung des Sachverhalts hinderlich sein mußte, in der bisher stillschweigend vorausgesetzten Korrespondenz zwischen dem permanenten konjugierten System (α, β) der auf das Paraboloid abwickelbaren Fläche und den Krümmungslinien der zugehörigen Fläche von konstanter Krümmung zu suchen ist. Tatsächlich kommt nun in dem von uns betrachteten Falle der Biegungsflächen des Paraboloids $z = i x y$ als Repräsentant des Integrals θ von (I) nicht eine auf die Krümmungslinien bezogene Fläche von konstanter Krümmung $K = 1$ in Frage, sondern das Paar der beiden Flächen, für die die Quadrate der Linienelemente

$$ds^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) \pm 4 d\alpha\, d\beta$$

lauten. Diese würden dann mit einer auf die Krümmungslinien (α, β) bezogenen Fläche von konstanter Krümmung $+1$[7]) durch eine Lie-Bonnetsche Transformation[8]) zusammenhängen. Es ist aber bekannt, daß gerade dieser Transformation keine einfache geometrische Operation im Raume entspricht, durch die sich die transformierten Flächen in bestimmter Orientierung ergäben.

Wir beweisen nun zunächst für die Biegungsflächen vom Typus (II) einen Satz, der sich seinem Wesen nach den Guichardschen Sätzen über die Verbiegung der Rotationsflächen 2. Grades anreiht, durch die seinerzeit Bianchi[9]) zu einer eingehenden Untersuchung der Deformation von Linienkongruenzen im Beltramischen Sinne veranlaßt wurde. Mit den Punkten der in Rede stehenden Flächen lassen sich nämlich in starrer Koppelung mit den Flächenelementen die Strahlen zweier Kongruenzen verbinden, die bei beliebiger isometrischer Deformation der betreffenden Fläche stets die Normalen*richtungen*, d. h. also die sphärischen Abbildungen eines durch die Hazzidakissche Transformation verbundenen Paares von Flächen konstanter positiver Krümmung bestimmen. Die Umkehrung dieses Satzes gestattet dann die Konstruktion der Flächen vom Typus (II). Der Nachweis, daß für die wenigen dabei zu leistenden Quadraturen die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, erscheint in Anbetracht des einfachen Ergebnisses etwas kompliziert; er bringt dafür aber gleichzeitig den Anschluß an die bisherige Theorie. Es stellt sich nämlich heraus, daß man auf Grund der als gegeben vorausgesetzten Bildkugeln des Hazzidakisschen Paares die Integrale des obenerwähnten Systems totaler Differentialgleichungen ohne jede Integration unmittelbar niederschreiben kann. Dieses Resultat ergibt sich übrigens in einer außerordentlich eleganten geometri-

[7]) Das Quadrat des Linienelements wäre $ds^2 = 4(ch^2\theta\, d\alpha^2 + sh^2\theta\, d\beta^2)$ bzw. $ds^2 = 4(sh^2\theta\, d\alpha^2 + ch^2\theta\, d\beta^2)$.

[8]) Bianchi, Lezioni di geometria differenziale 2 (1903), S. 439.

[9]) Bianchi, Lezioni 2, Kap. XVII.

schen Gestalt: die vier Integralfunktionen des Systems entsprechen, als Eulersche Parameter aufgefaßt, derjenigen Drehung, durch die das der einen Bildkugel zugeordnete rechtwinklige Dreikant in das Dreikant der anderen Bildkugel übergeführt wird.

Kapitel I.

Spezielle Gewebe, die im Zusammenhang mit den Biegungsflächen der Linienflächen auftreten.

§ 1.

Asymptotische Gewebe und Biegungsflächen der geraden Konoide.

1. Ein *Kurvennetz ohne Umwege* oder kürzer: ein *Gewebe*[10]) auf einer krummen Oberfläche liegt vor, wenn die Fundamentalgrößen die Bedingung

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial\beta} = \pm\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\alpha}$$

erfüllen. Wird, worin keine Beschränkung der Allgemeinheit liegt, das Zeichen $+$ genommen, so kann man

$$\sqrt{E} = \varphi_\alpha, \qquad \sqrt{G} = \varphi_\beta\ ^{11})$$

setzen. Das Quadrat des Linienelements der auf das Gewebe (α, β) bezogenen Fläche hat dann die Form

$$(1) \qquad \sum dx^2 = (\varphi_\alpha)^2 d\alpha^2 + 2\varphi_\alpha\varphi_\beta \cos\omega\, d\alpha\, d\beta + (\varphi_\beta)^2 d\beta^2.$$

Wir wollen nun annehmen, daß ***das Gewebe von den Asymptotenlinien der Fläche*** $(x,\ldots)$ ***gebildet wird.*** Unter dieser Voraussetzung ist, wenn

$$K = -\frac{1}{\varrho^2}$$

das Krümmungsmaß der Fläche bezeichnet,

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\varrho}{\partial\beta}, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial\log\varrho}{\partial\alpha},$$

wobei sich die Christoffelschen Symbole nach den Formeln

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{GE_\beta - FG_\alpha}{2(EG-F^2)}, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{EG_\alpha - FE_\beta}{2(EG-F^2)}$$

---

[10]) Rothe, Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen unausdehnbaren Netz, Berl. Math. Ges. Ber. 5 (1906), S. 9; Über die Bekleidung einer Fläche mit einem Gewebe, ebendort 7 (1907), S. 12.

[11]) Der Kürze halber benutzen wir überall, wo es mit der Deutlichkeit vereinbar erscheint, Buchstabenindizes, um die partiellen Ableitungen nach den Bezugsparametern zu kennzeichnen.

berechnen. Man findet durch Einsetzen der Koeffizienten des Linienelements (1):

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=p\,\varphi_\beta,\qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=p\,\varphi_\alpha;$$

dabei ist

$$p=\frac{1}{1+\cos\omega}\cdot\frac{\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi_\alpha\varphi_\beta}.$$

Da demnach

$$(2)\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\log\varrho}{\partial\alpha}=p\,\varphi_\alpha,\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\log\varrho}{\partial\beta}=p\,\varphi_\beta,$$

also $p_\alpha\varphi_\beta-p_\beta\varphi_\alpha=0$ wird, muß p Funktion von φ sein. Nach (2) wird dann aber auch ϱ Funktion von φ, und man erhält:

$$p=\frac{1}{2}\frac{d\log\varrho}{d\varphi}=\frac{\varrho'(\varphi)}{2\,\varrho(\varphi)},$$

$$\cos\omega=\frac{2\,\varrho(\varphi)}{\varrho'(\varphi)}\cdot\frac{\varphi_{\alpha\beta}}{\varphi_\alpha\varphi_\beta}-1,$$

also:

$$(3)\qquad \sum dx^2=(\varphi_\alpha)^2d\alpha^2+2\left(\frac{2\varrho}{\varrho'}\varphi_{\alpha\beta}-\varphi_\alpha\varphi_\beta\right)d\alpha\,d\beta+(\varphi_\beta)^2d\beta^2.$$

Wird nun die Funktion $\varrho(\varphi)$ willkürlich gewählt, so gelangt man, indem man zum Ausdruck bringt, daß das Krümmungsmaß der quadratischen Differentialform (3) den Wert $-\frac{1}{\varrho^2}$ haben soll, zu einer partiellen Differentialgleichung 4. Ordnung für die Funktion φ der Parameter α und β. Ein partikuläres Integral φ würde eine Fläche der durch die Relation $\varrho=\varrho(\varphi)$ charakterisierten Klasse intrinsek bestimmen.

2. Wir bemerken, daß die *Krümmungslinien* durch die Differentialgleichungen

$$\varphi_\alpha d\alpha\pm\varphi_\beta d\beta=0$$

gegeben sind, daß also die eine Schar derselben — wir wollen sie die *erste* nennen — durch die Kurven $\varphi=$ konst., d. h. also $K=$ konst. dargestellt wird. Hierin liegt ein bereits bekannter (übrigens auch umkehrbarer) Satz[12]):

Bilden die Asymptotenlinien einer Fläche ein Gewebe, so besteht die eine Schar ihrer Krümmungslinien aus den Kurven konstanten Krümmungsmaßes.

3. Wir wenden uns zur Betrachtung der Evolutenfläche. Allgemein gelten für eine auf die Asymptotenlinien (α,β) bezogene Fläche (x, y, z), deren Normalenkosinus mit X, Y, Z bezeichnet sind, die Formeln:

---

[12]) S. die erste der unter [10]) zitierten Mitteilungen von Rothe.

$$(4)\quad \begin{cases} \sum dx^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2, \quad -\sum dx dX = \dfrac{2\sqrt{EG-F^2}}{\varrho} d\alpha d\beta, \\ \sum dX^2 = \dfrac{1}{\varrho^2}(E d\alpha^2 - 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2). \end{cases}$$

Es werde nun derjenige Mantel (x_1, y_1, z_1) der Evolutenfläche ins Auge gefaßt, den die Rückkehrkanten der abwickelbaren Normalenflächen

$$\sqrt{E}\, d\alpha + \sqrt{G}\, d\beta = 0$$

bedecken. Der zugehörige Hauptkrümmungsradius ist:

$$(5)\qquad r_1 = \frac{\varrho(F - \sqrt{EG})}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Es wird:

$$x_1 = x + r_1 X,\ ^{13})$$

$$\sum dx_1^2 = \sum dx^2 + dr_1^2 + 2r_1 \sum dx dX + r_1^2 \sum dX^2.$$

Werden die Ausdrücke (4) in diese Formel für das Linienelement des Evolutenmantels eingesetzt, so nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$\sum dx_1^2 = dr_1^2 + \left(1 + \frac{r_1^2}{\varrho^2}\right)(\sqrt{E}\, d\alpha + \sqrt{G}\, d\beta)^2 + 2Q\, d\alpha\, d\beta,$$

wobei

$$Q = -\sqrt{EG}\left(1 + \frac{r_1^2}{\varrho^2}\right) + F\left(1 - \frac{r_1^2}{\varrho^2}\right) - \frac{2r_1}{\varrho}\sqrt{EG - F^2}$$

st. Mit Benutzung des Wertes (5) von r_1 ergibt sich $Q = 0$, so daß

$$\sum dx_1^2 = dr_1^2 + \left(1 + \frac{r_1^2}{\varrho^2}\right)(\sqrt{E}\, d\alpha + \sqrt{G}\, d\beta)^2$$

wird.

Bilden nun auf der Fläche $(x, \ldots)$ die Asymptotenlinien ein Gewebe, so wird

$$\sqrt{E}\, d\alpha + \sqrt{G}\, d\beta = d\varphi,$$

während gleichzeitig ϱ Funktion von φ ist. Es gilt dann also für das Linienelement des zu der *ersten* Krümmungslinienschar gehörigen Evolutenmantels die Formel:

$$\sum dx_1^2 = dr_1^2 + \left(r_1^2 + \varrho^2\right)\left(\frac{d\varphi}{\varrho}\right)^2.$$

Setzen wir

$$r_1 = u, \quad \int \frac{d\varphi}{\varrho} = v, \quad \varrho^2 = V,$$

wo V also eine Funktion von v bedeutet, so wird:

$$(6)\qquad \sum dx_1^2 = du^2 + (u^2 + V) dv^2.$$

[13]) Wo ein Mißverständnis ausgeschlossen erscheint, unterdrücken wir den Hinweis auf das Bestehen der analogen Beziehungen für die beiden anderen Koordinaten.

Diese Formel charakterisiert den Evolutenmantel als Biegungsfläche eines *geraden Konoids*, dessen Gleichungen

$$x = u \cos v, \qquad y = u \sin v, \qquad z = \int \sqrt{V}\, dv$$

lauten würden.

Wir haben damit den Satz gewonnen:

Bilden die Asymptotenlinien auf einer Fläche ein Gewebe, so ist derjenige Mantel der Evolutenfläche, der den Krümmungslinien der ersten Schar, d. h. den Kurven $K =$ konst. entspricht, auf ein gerades Konoid abwickelbar.

Hingewiesen sei dabei auf die bekannte Tatsache, daß die Biegungs*regelflächen* der geraden Konoide die *Binormalenflächen* sind.

4. Einen Spezialfall stellen die Flächen von konstanter negativer Krümmung ($K = -1$) dar, für die das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2 \cos \omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2$$

lautet. Die Asymptotenlinien (α, β) lassen sich in doppelter Weise, nämlich mit $\varphi = \alpha + \beta$ und $\varphi = \alpha - \beta$ als Gewebe auffassen. Die beiden Evolutenmäntel gehören dem in (6) enthaltenen Typus

$$du^2 + (u^2 + 1)\, dv^2$$

an und sind Biegungsflächen der Minimalschraubenfläche.

Man weiß überdies, daß in diesem Falle die Asymptotenlinien der Evolutenmäntel den Asymptotenlinien der gegebenen pseudosphärischen Fläche entsprechen. Auch diese Tatsache läßt eine Verallgemeinerung zu:

Bilden die Asymptotenlinien einer Fläche ein Gewebe, so entsprechen ihnen die Asymptotenlinien des auf das gerade Konoid abwickelbaren Evolutenmantels.

Der Beweis dieses Zusatzes zu unserem Theorem wird in § 2 gleichzeitig mit verschiedenen anderen Fragen erledigt werden, die sich unter Zugrundelegung der Form des Linienelements von der Evolutenfläche aus beantworten lassen.

§ 2.

Evolventenflächen der auf Regelflächen abwickelbaren Flächen.

1. Wir betrachten nun eine zunächst als ganz beliebig vorausgesetzte Fläche $(x, \ldots)$, die wir uns auf ein System geodätischer Linien $v =$ konst. und auf deren orthogonale Trajektorien $u =$ konst. bezogen denken. Dann ist:

$$\sum dx^2 = du^2 + G\, dv^2, \tag{1}$$

wobei zur Vereinfachung der Schreibweise außerdem

$$\sqrt{G} = C$$

gesetzt sei. Wir wollen die Fläche $(x, \ldots)$ als Repräsentanten einer isometrischen Flächenklasse ansehen, die durch die Funktion $G(u, v)$ definiert ist.

Mit X, Y, Z seien die Normalenkosinus, mit L, M, N die Fundamentalgrößen 2. Ordnung bezeichnet. Es ist dann:

$$(2) \quad x_{uu} = LX, \quad x_{uv} = \frac{C_u}{C} x_v + MX, \quad x_{vv} = -CC_u x_u + \frac{C_v}{C} x_v + NX,$$

$$(3) \qquad K = -\frac{C_{uu}}{C}, \quad LN - M^2 = C^2 K = -CC_{uu}.$$

Wir untersuchen nun die zu der Schar der geodätischen Linien gehörige *Evolventenfläche* $(\mathfrak{x}, \ldots)$, die durch

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = x - u x_u$$

gegeben ist; dabei denken wir uns aus dem System der ∞^1 Orthogonalflächen, die zu der von den Tangenten der geodätischen Linien gebildeten Normalenkongruenz gehören, eine einzelne herausgegriffen und dementsprechend die an sich noch vorhandene willkürliche additive Konstante in u hineingezogen.

Durch Differentiation von (4) erhält man mit Berücksichtigung von (2):

$$\mathfrak{x}_u = -uLX, \quad \mathfrak{x}_v = \left(1 - \frac{uC_u}{C}\right) x_v - uMX.$$

Für das Quadrat des Linienelements der Evolventenfläche ergibt sich demnach, wenn von der Relation

$$(5) \qquad M^2 = LN + CC_{uu}$$

Gebrauch gemacht wird:

$$(6) \qquad \sum d\mathfrak{x}^2 = u^2 L (L du^2 + 2M du dv + N dv^2) + [(C - uC_u)^2 + u^2 CC_{uu}] dv^2.$$

Bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Richtungskosinus der Tangenten an die geodätischen Linien, die also gleichzeitig Normalen der Evolventenfläche sind, so ist:

$$\mathfrak{X} = x_u, \quad \mathfrak{X}_u = LX, \quad \mathfrak{X}_v = \frac{C_u}{C} x_v + MX.$$

Wir bilden hiernach die zweite quadratische Differentialform der Evolventenfläche $(\mathfrak{x}, \ldots)$ und finden, indem wir wiederum (5) beachten:

$$(7) \quad \mathfrak{L} du^2 + 2\mathfrak{M} du dv + \mathfrak{N} dv^2 = -\sum d\mathfrak{x} d\mathfrak{X}$$
$$= uL(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) + [u(C_u)^2 - CC_u + uC_{uu}] dv^2.$$

Für das Quadrat des Linienelements ihrer Bildkugel folgt schließlich mit abermaliger Benutzung von (5):

$$(8) \quad \sum d\mathfrak{X}^2 = L(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) + [(C_u)^2 + CC_{uu}]\,dv^2.$$

Die in den Formeln (6), (7) und (8) auftretenden, von L, M, N unabhängigen Faktoren des letzten Gliedes lassen sich mit größerem Vorteil durch G ausdrücken:

$$(\mathrm{a}) \qquad (C - uC_u)^2 + u^2 CC_{uu} = G - uG_u + \frac{u^2}{2} G_{uu},$$

$$(\mathrm{b}) \qquad u(C_u)^2 - CC_u + uC_{uu} = \frac{1}{2}(uG_{uu} - G_u),$$

$$(\mathrm{c}) \qquad (C_u)^2 + CC_{uu} = \frac{1}{2} G_{uu}.$$

2. Wir denken uns die Biegungsfläche andrerseits auch auf die Parameter α und β ihrer Asymptotenlinien bezogen. Dann liefert in den Formeln (6), (7) und (8) der Ausdruck $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ nur einen Beitrag zu dem Gliede mit $d\alpha\,d\beta$. Auf Grund dieser Bemerkung erkennt man sofort, daß die Kurven (α, β) auf der Evolventenfläche oder auf deren Bildkugel ein Gewebe darstellen, wenn der Ausdruck (a) bzw. (c) eine (nicht identisch verschwindende) Funktion von v allein ist. Man erhält nun aber, indem man die partielle Ableitung nach u für (a) bzw. für (c) gleich 0 setzt, beide Male die gleiche Bedingung $G_{uuu} = 0$, so daß die gedachten Eigenschaften gleichzeitig auftreten und zwar, wenn

$$G = V_1 u^2 + 2V_2 u + V_3$$

ist. Diese Formel charakterisiert die Fläche $(x, \ldots)$ als Biegungsfläche einer (reellen oder imaginären) Linienfläche; die geodätischen Linien $v =$ konst. sind dabei die Biegungslinien der Erzeugenden. Durch zweckmäßige Wahl von v kann man V_1 zur Konstanten machen und, wenn reelle Linienflächen des betreffenden Typus[14]) existieren, $V_1 = 1$ setzen. Wir haben damit den Satz gewonnen:

Den Asymptotenlinien einer auf eine Regelfläche abwickelbaren Fläche entsprechen die Kurven eines Gewebes 1. auf den durch die Biegungslinien der Erzeugenden definierten Evolventenflächen und 2. auf der Bildkugel dieser Evolventenflächen. Jede einzelne dieser beiden Eigenschaften ist für die Biegungsflächen der Regelflächen charakteristisch.

---

[14]) $V_1 > 0$, $V_1 V_3 - V_2^2 > 0$; angemerkt sei die Formel für das Krümmungsmaß:

$$K = -\frac{V_1 V_3 - V_2^2}{V_1 u^2 + 2V_2 u + V_3}$$

Die Annahme $V_1 = 0$ entspricht der Weingarten-Goursatschen Form des Linienelements

$$(9) \qquad ds^2 = du^2 + (u + V)dv^2,\text{[15]})$$

deren Betrachtung zum ersten Male zur Bestimmung vollständiger Klassen aufeinander abwickelbarer Flächen führte, die nicht dem Rotationsflächentypus angehörten. Die gemeinsame charakteristische Eigenschaft der Flächen vom Typus (9), der diese interessanten Ergebnisse entsprangen, ist die Korrespondenz zwischen den Asymptotenlinien der Biegungsfläche und den Minimallinien der zur Evolventenfläche gehörigen Bildkugel. Diese Eigentümlichkeit folgt unmittelbar aus dem Umstande, daß wegen $V_1 = 0$ der Ausdruck (b) verschwindet. Von Darboux[16]) wurde übrigens darauf hingewiesen, daß es sich beim Typus (9) um einen Grenzfall des Linienelements einer Regelfläche handelt (Regelfläche mit isotroper Leitebene).

Fragt man andererseits nach der Bedingung dafür, daß den Asymptotenlinien der Biegungsfläche die Minimallinien der Evolventenfläche (d. h. also *einer* der ∞^1 Evolventenflächen) entsprechen, so findet man, da der Ausdruck (a) verschwinden soll, $V_3 = 0$ und

$$G = V_1 u^2 + 2V_2 u.$$

Das bedeutet ebenfalls einen Grenzfall einer Regelfläche: die Direktrix und Orthogonaltrajektorie $u = 0$ wäre Minimallinie.

3. Die Annahme $V_2 = 0$ führt auf den uns hier besonders interessierenden Spezialfall des *geraden Konoids*. Wird ein solches als reell vorausgesetzt, so kann man schreiben:

$$(10) \qquad ds^2 = du^2 + (u^2 + V)dv^2,$$

wobei $V > 0$ ist. Als Besonderheit kommt hier das Verschwinden des Ausdrucks (b) hinzu. Berücksichtigt man außerdem, daß auf dem Konoid die Orthogonaltrajektorie $u = 0$ die Achse darstellt, so ist man imstande, jetzt die Umkehrung des Theorems vom § 1 zusammen mit dem am Schluß von § 1 noch ohne Beweis angemerkten Zusatz in der folgenden Form als bewiesen auszusprechen:

Wird von den Biegungslinien der Erzeugenden einer durch isometrische Deformation aus einem geraden Konoid hervorgegangenen Fläche ein System unausdehnbarer, bis zur Biegungslinie der Achse reichender Fäden abgewickelt, so beschreiben dabei die Endpunkte der Fäden eine

---

[15]) Hier sei vor allem auf die Darstellung bei Darboux verwiesen (Leçons sur la théorie générale des surfaces 4 (1896), chap. XIII).

[16]) A. a. O. S. 383.

ausgezeichnete Evolventenfläche, deren Asymptotenlinien stets den Asymptotenlinien der Biegungsfläche entsprechen und überdies ein Gewebe bilden.

Es sei übrigens darauf hingewiesen, daß die Korrespondenz zwischen den Asymptotenlinien einer Fläche und denen einer dazu gehörigen Evolventenfläche die erste Fläche bereits als Biegungsfläche eines geraden Konoids charakterisiert[17]). Die Proportionalität der zweiten quadratischen Differentialformen für die beiden Flächen $(x, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}, \ldots)$ ist nämlich nur dadurch möglich, daß der Ausdruck (b) identisch verschwindet, daß also

$$(11) \qquad uG_{uu} - G_u = 0$$

wird. Durch Differentiation nach u folgt aber $G_{uuu} = 0$, so daß man wieder mit dem allgemeinen Ausdruck $G = V_1 u^2 + 2V_2 u + V_3$ in (11) hineinzugehen hat, wobei sich dann $V_2 = 0$ ergibt.

Kapitel II.

Eine besondere Klasse Γ von Orthogonalsystemen auf der Kugel und ihre Beziehungen zu den Biegungsflächen des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids.

§ 3.

Definition der Kurvennetze Γ auf Grund einer Eigenschaft der geodätischen Krümmungen.

1. Die Gaußsche Formel, nach der sich das Krümmungsmaß einer Fläche allein auf Grund ihrer Fundamentalgrößen 1. Ordnung berechnet, läßt sich bekanntlich in der Gestalt des Bonnetschen Ausdrucks schreiben. Dieser enthält die geodätischen Krümmungen der Kurven eines Orthogonalsystems auf der Fläche und ihre Ableitungen, jede genommen nach dem längs der Kurve der anderen Schar variablen Parameter und dividiert durch deren Linienelement. Werden die geodätischen Krümmungen der sich in einem Flächenpunkt rechtwinklig schneidenden Kurven des Netzes mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ und die in der angegebenen Weise gebildeten „geometrischen Differentiationen" mit den Symbolen Θ und Θ' bezeichnet, so lautet die Bonnetsche Formel:

$$(1) \qquad K = \Theta\mathfrak{g}' + \Theta'\mathfrak{g} - \mathfrak{g}^2 - \mathfrak{g}'^2.\ ^{18})$$

---

[17]) In bezug auf Flächenpaare mit senkrechten Normalen und korrespondierenden Asymptotenlinien vgl. man Jonas, Sur une transformation qui dépend d'une équation aux dérivées partielles du 3^{me} ordre. C. R. de l'Ac. des Sc. 156 (1913), p. 1316.

[18]) Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie (1913), § 56.

Man kann nun allgemein die Frage nach denjenigen Orthogonalscharen einer Fläche aufwerfen, für die die beiden ersten Glieder der Bonnetschen Formel einander gleich werden, also die Beziehung

$$\Theta \mathfrak{g}' = \Theta' \mathfrak{g}$$

besteht. Wir beschränken uns auf den Fall der *Kugel* und suchen auf dieser die *Orthogonalsysteme, bei denen in jedem Knotenpunkte die geodätischen Krümmungen der beiden Kurven die gleiche geometrische Ableitung in bezug auf die Orthogonalkurve besitzen.* Sie mögen *Kurvennetze* Γ genannt werden.

2. Es seien X, Y, Z die Koordinaten des laufenden Punktes einer auf ein Orthogonalsystem (α, β) bezogenen Einheitskugel mit dem Quadrat des Linienelements:

$$\sum d X^2 = e d\alpha^2 + g d\beta^2.$$

Mit Rücksicht auf die nachfolgenden Entwicklungen bezeichnen wir die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien im Punkte $(X, \ldots)$ mit ϑ und ϑ', und zwar mit ϑ für die α-Kurve ($\beta =$ konst.), mit ϑ' für die β-Kurve ($\alpha =$ konst.). Dann ist nach bekannten Formeln:

$$(2) \qquad \vartheta = -\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial \beta}, \qquad \vartheta' = -\frac{1}{\sqrt{eg}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \alpha}.$$

Sollen nun die Kurven (α, β) ein Γ-Netz vorstellen, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Bonnetschen Formel (mit $K = 1$) als Bedingung das Gleichungspaar:

$$(3) \qquad \frac{2}{\sqrt{g}} \vartheta_\beta = \frac{2}{\sqrt{e}} \vartheta'_\alpha = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2.$$

Es gelingt nun leicht, $\sqrt{e}$ und $\sqrt{g}$ durch die Ableitungen von ϑ und ϑ' auszudrücken und für diese beiden Größen ein Paar simultaner partieller Differentialgleichungen aufzustellen. Differentiiert man nämlich die Relation

$$2 \vartheta_\beta = \sqrt{g} (1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2)$$

nach α und berücksichtigt dabei, daß

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \alpha} = -\sqrt{eg} \cdot \vartheta', \qquad 2 \vartheta'_\alpha = \sqrt{e} (1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2)$$

ist, so findet man zunächst

$$\vartheta_{\alpha\beta} = \sqrt{g}\, \vartheta\, \vartheta_\alpha.$$

Mit Benutzung von (2) kann man diese Beziehung wie folgt schreiben:

$$\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta_\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \sqrt{e}}{\partial \beta}.$$

Durch Integration ergibt sich:

(4) $$\vartheta_\alpha \sqrt{e} = \psi(\alpha),$$

wo $\psi(\alpha)$ eine Funktion von α allein bedeutet. Führt man nun $\int \sqrt{\psi(\alpha)}\,d\alpha$ an Stelle von α als Variable ein, bedient sich nachträglich aber wieder der Bezeichnung α, so reduziert sich (4) auf:

$$\sqrt{e} = \frac{1}{\vartheta_\alpha}.$$

In entsprechender Weise ergibt sich:

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\vartheta'_\beta}.$$

Damit geht (3) über in das Gleichungspaar:

(5) $$2\vartheta_\alpha \vartheta'_\alpha = 2\vartheta_\beta \vartheta'_\beta = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2.$$

Stellen ϑ, ϑ' ein Paar von Lösungen dieser beiden simultanen Differentialgleichungen dar, so erweisen sich auch die Relationen (2) als erfüllt. Differentiiert man nämlich von den Relationen

$$2\vartheta_\alpha \vartheta'_\alpha = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2, \qquad 2\vartheta_\beta \vartheta'_\beta = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2$$

die erste nach β und die zweite nach α, so ergibt sich:

(6) $$\begin{cases} \vartheta_{\alpha\beta}\vartheta'_\alpha + \vartheta'_{\alpha\beta}\vartheta_\alpha = \vartheta\vartheta_\beta + \vartheta'\vartheta'_\beta, \\ \vartheta_{\alpha\beta}\vartheta'_\beta + \vartheta'_{\alpha\beta}\vartheta_\beta = \vartheta\vartheta_\alpha + \vartheta'\vartheta'_\alpha. \end{cases}$$

Wird im Hinblick auf die weiteren Entwicklungen

$$\sqrt{\frac{g}{e}} = \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta'_\beta} = \frac{\vartheta_\beta}{\vartheta'_\alpha} = e^\varphi$$

gesetzt (im folgenden bedeutet e nur noch die Exponentialgröße), so findet man, indem man das Gleichungspaar (6) nach $\vartheta_{\alpha\beta}$ und $\vartheta'_{\alpha\beta}$ auflöst[19]):

(7) $$\vartheta_{\alpha\beta} = e^\varphi \vartheta, \qquad \vartheta'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi}\vartheta'.$$

Diese Relationen sind gleichbedeutend mit (2).

Wir können demnach sagen, daß *die Bestimmung der Orthogonalsysteme Γ auf der Einheitskugel die Integration der Differentialgleichungen* (5) *verlangt und sich als äquivalent mit dem Tschebyscheffschen Bekleidungsproblem für die quadratische Differentialform*

$$\frac{2\,d\vartheta\,d\vartheta'}{1+\vartheta^2+\vartheta'^2}$$

---

[19]) Wir verweilen nicht bei der speziellen Annahme $\vartheta_\alpha = \pm\,\vartheta_\beta$, die kein Interesse bietet.

erweist, bei dem es sich um die Ermittlung zweier Parameter α *und* β *handelt, für die*

$$\frac{2\,d\vartheta\,d\vartheta'}{1+\vartheta^2+\vartheta'^2} = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\mathfrak{F}\,d\alpha\,d\beta$$

wird.

3. Es ist, und zwar in erster Linie infolge der Untersuchungen von Servant[20]), bekannt, daß die Bestimmung der Biegungsflächen der Flächen 2. Grades, soweit es sich um die Ermittlung der flächentheoretischen Fundamentalgrößen, nicht der Koordinaten handelt, von einem derartigen Tschebyscheffschen Problem abhängt. Für den Fall der allgemeinsten, auf die Parameter u und v der Erzeugenden bezogenen Fläche 2. Grades hat die betreffende quadratische Differentialform die Gestalt[21])

$$\frac{2\,du\,dv}{H},$$

wobei

$$H = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu} u^\lambda v^\mu \qquad (\lambda = 0, 1, 2;\ \mu = 0, 1, 2)$$

ist. Der Fall $H = 1 + u^2 + v^2$ entspricht dem *gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid.*

Für unsere Zwecke erübrigt es sich, an dieser Stelle auf die Theorie der isometrischen Deformation der Paraboloide, so wie sie vorliegt, näher einzugehen, da sich in § 5 eine mit dem Γ-Netz verwandte Biegungsfläche des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids ganz von selber einstellen wird. Dabei wird es sich zeigen, daß der Zusammenhang mit dem Γ-Netz nicht bloß analytischer Natur ist, sondern daß infolge einer engen geometrischen Beziehung die Biegungsfläche des Paraboloids sich in einer (bis auf Translationen) bestimmten räumlichen Orientierung ergibt.

§ 4.

Aufstellung eines Systems von Differentialgleichungen.

1. Wir wollen nun das Paar der Differentialgleichungen (5) von § 3 durch ein System totaler linearer und homogener Differentialgleichungen für die vier Größen ϑ, ϑ', ϑ_α, ϑ_β ersetzen. Differentiiert man unter Benutzung von § 3 (7) die Relationen

$$e^{-\varphi}\,\vartheta_\alpha = \vartheta'_\beta, \qquad e^{-\varphi}\,\vartheta_\beta = \vartheta'_\alpha$$

---

[20]) Servant, Sur l'habillage des surfaces. C. R. de l'Ac. des Sc. **135** (1902), p. 575; **137** (1903), p. 112.

[21]) S. auch Jonas, Über eine neue Differentialgleichung des Deformationsproblems usw. Berl. Math. Ges. Ber. **13** (1914), S. 52.

bezüglich nach α und β, so erhält man, indem man die bereits bekannten Relationen hinzufügt, das folgende System:

$$(1)\qquad \begin{cases} \vartheta_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha \vartheta_\alpha + \vartheta', \quad \vartheta_{\alpha\beta} = e^\varphi \vartheta, \quad \vartheta_{\beta\beta} = \varphi_\beta \vartheta_\beta + \vartheta', \\ \vartheta'_\alpha = e^{-\varphi} \vartheta_\beta, \quad \vartheta'_\beta = e^{-\varphi} \vartheta_\alpha. \end{cases}$$

Es verlangt als Integrabilitätsbedingung, daß φ Integral der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(2)\qquad \varphi_{\alpha\beta} = e^\varphi - e^{-\varphi}$$

ist, und ist dann unbeschränkt integrabel. (2) stellt, von Realitätsfragen abgesehen, die Differentialgleichung dar, von der die Bestimmung der Flächen von konstanter Krümmung abhängt.

Das System (1) läßt, wie man unmittelbar durch Differentiation bestätigt, allgemein das Integral

$$(3)\qquad 2e^{-\varphi} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta - \vartheta^2 - \vartheta'^2 = \text{konst.}$$

zu. Demnach trifft die Festsetzung

$$2e^{-\varphi} \vartheta_\alpha \vartheta_\beta - \vartheta^2 - \vartheta'^2 = 1,$$

d. h. also § 3 (5)

$$(4)\qquad 2\vartheta_\alpha \vartheta'_\alpha = 2\vartheta_\beta \vartheta'_\beta = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2,$$

nur die Werte der vier unbekannten Funktionen ϑ, ϑ_α, ϑ_β, ϑ' für ein anfängliches Wertepaar α_0, β_0.

Wir bemerken, daß man dem System (1) auch die folgende Form geben kann:

$$(5)\qquad \begin{cases} \vartheta'_{\alpha\alpha} = -\varphi_\alpha \vartheta'_\alpha + \vartheta, \quad \vartheta'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi} \vartheta', \quad \vartheta'_{\beta\beta} = -\varphi_\beta \vartheta'_\beta + \vartheta, \\ \vartheta_\alpha = e^\varphi \vartheta'_\beta, \quad \vartheta_\beta = e^\varphi \vartheta'_\alpha. \end{cases}$$

2. Wir betrachten jetzt in Verbindung mit einem jeden Punkte (X, Y, Z) der Einheitskugel, die von dem Γ-Netz (α, β) bedeckt sein soll, das rechtwinklige Dreikant, das von dem nach außen verlängerten Radius und von den beiden Tangenten an die α-Kurve ($\beta =$ konst.) und an die β-Kurve ($\alpha =$ konst.) gebildet wird. Mit $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ seien die Richtungskosinus der α-Tangente, mit $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$, $Z^{(2)}$ die der β-Tangente bezeichnet. Wir bilden mit Berücksichtigung der Werte

$$\sqrt{e} = \frac{1}{\vartheta_\alpha}, \quad \sqrt{g} = \frac{1}{\vartheta'_\beta}$$

die Differentialrelationen dieses Dreikants:

$$(6)\qquad \begin{cases} X_\alpha = \frac{1}{\vartheta_\alpha} X^{(1)}, & X_\beta = \frac{1}{\vartheta'_\beta} X^{(2)}, \\ X^{(1)}_\alpha = \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} X^{(2)} - \frac{1}{\vartheta_\alpha} X, & X^{(1)}_\beta = -\frac{\vartheta'}{\vartheta'_\beta} X^{(2)}, \\ X^{(2)}_\alpha = -\frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} X^{(1)}, & X^{(2)}_\beta = \frac{\vartheta'}{\vartheta'_\beta} X^{(1)} - \frac{1}{\vartheta'_\beta} X. \end{cases}$$

3. Die weitere Untersuchung betrifft jetzt die beiden folgenden Größentripel:

$$(7)\quad \begin{cases} \xi = \vartheta X + X^{(2)}, & \eta = \vartheta Y + Y^{(2)}, \quad \zeta = \vartheta Z + Z^{(2)}, \\ \xi' = \vartheta' X + X^{(1)}, & \eta' = \vartheta' Y + Y^{(1)}, \quad \zeta' = \vartheta' Z + Z^{(1)}. \end{cases}$$

Man findet zunächst mit Benutzung von (6):

$$(8)\qquad \xi_\alpha = \vartheta_\alpha X, \quad \xi'_\beta = \vartheta'_\beta X,$$

also

$$\xi'_\beta = e^{-\varphi}\xi_\alpha.$$

Andererseits ergibt sich:

$$(9)\quad \begin{cases} \xi_\beta = \frac{1}{\vartheta'_\beta}\left[\frac{1}{2}(\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 1)X + \vartheta' X^{(1)} + \vartheta X^{(2)}\right], \\ \xi'_\alpha = \frac{1}{\vartheta_\alpha}\left[\frac{1}{2}(\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 1)X + \vartheta' X^{(1)} + \vartheta X^{(2)}\right], \end{cases}$$

so daß auch

$$\xi'_\alpha = e^{-\varphi}\xi_\beta$$

wird. Differentiiert man die erste Relation (8) nach β und ersetzt dabei $\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta'_\beta}$ durch e^φ, so erhält man

$$\xi_{\alpha\beta} = e^\varphi \xi,$$

und ebenso aus der zweiten Relation (8):

$$\xi'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi}\xi'.$$

Verfährt man nun ganz wie in Nr. 1 dieses Paragraphen, so gelangt man zu dem System:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_{\alpha\alpha} = \varphi_\alpha \xi_\alpha + \xi', \quad \xi_{\alpha\beta} = e^\varphi \xi, \quad \xi_{\beta\beta} = \varphi_\beta \xi_\beta + \xi', \\ \qquad \xi'_\alpha = e^{-\varphi}\xi_\beta, \quad \xi'_\beta = e^{-\varphi}\xi_\alpha, \end{cases}$$

das sich auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$(11)\quad \begin{cases} \xi'_{\alpha\alpha} = -\varphi_\alpha \xi'_\alpha + \xi, \quad \xi'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi}\xi', \quad \xi'_{\beta\beta} = -\varphi_\beta \xi'_\beta + \xi, \\ \qquad \xi_\alpha = e^\varphi \xi'_\beta, \quad \xi_\beta = e^\varphi \xi'_\alpha. \end{cases}$$

Die von $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ erfüllten Systeme (10) und (11) stimmen also mit den für ϑ und ϑ' gefundenen (2) und (3) überein. Ein Unterschied besteht aber bezüglich der Konstanten, die in dem quadratischen Integral (3) auftritt. Wie man durch direktes Ausmultiplizieren auf Grund der Formeln (8) und (9) erkennt, wird hier nämlich:

$$(12)\qquad 2\xi_\alpha \xi'_\alpha = 2\xi_\beta \xi'_\beta = \xi^2 + \xi'^2 - 1.$$

3. Von den folgenden, leicht zu bestätigenden Formeln, in denen sich daß Summenzeichen $\sum$ über ξ, η, ζ bzw. ξ', η', ζ' erstrecken soll, werden wir weiterhin Gebrauch machen:

$$(13)\quad \begin{cases} \sum \xi^2 = 1+\vartheta^2, & \sum \xi\xi' = \vartheta\vartheta', \qquad \sum \xi'^2 = 1+\vartheta'^2, \\ \sum \xi'\xi_\alpha = \vartheta'\vartheta_\alpha, & \sum \xi'\xi_\beta = \vartheta'\vartheta_\beta, \\ \sum \xi\xi'_\alpha = \vartheta\vartheta'_\alpha, & \sum \xi\xi'_\beta = \vartheta\vartheta'_\beta, \\ \sum (\xi_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, & \sum \xi_\alpha\xi_\beta = \vartheta_\alpha\vartheta_\beta - e^\gamma, \qquad \sum (\xi_\beta)^2 = (\vartheta_\beta)^2, \\ \sum (\xi'_\alpha)^2 = (\vartheta_\alpha)^2, & \sum \xi'_\alpha\xi'_\beta = \vartheta'_\alpha\vartheta'_\beta - e^{-\gamma}, \qquad \sum (\xi'_\beta)^2 = (\vartheta'_\beta)^2. \end{cases}$$

Die beiden letzten Reihen lassen sich in der folgenden Schreibweise zusammenfassen:

$$(14)\qquad \sum d\xi^2 = d\vartheta^2 - 2e^\gamma\, d\alpha\, d\beta, \qquad \sum d\xi'^2 = d\vartheta'^2 - 2e^{-\gamma}\, d\alpha\, d\beta;$$

außerdem ist:

$$(15)\qquad \sum d\xi\, d\xi' = d\vartheta\, d\vartheta' - d\alpha^2 - d\beta^2.$$

4. Ersetzt man ϑ durch $i\tau$ nnd ϑ' durch $i\tau'$, so geht auch die Relation (4) in die mit (12) gleichlautende

$$2\tau_\alpha\tau'_\alpha = 2\tau_\beta\tau'_\beta = \tau^2 + \tau'^2 - 1$$

über. Abgesehen von der Realität, erscheinen dann die Größenpaare ξ, ξ'; η, η'; ζ, ζ'; τ, τ' als unter sich vollkommen gleichwertig. Wird das Summenzeichen S über die vier Größen ξ, η, ζ, τ bzw. $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ erstreckt, so kann man die Formeln von Nr. 3 wie folgt schreiben:

$$\mathsf{S}\, \xi^2 = 1, \quad \mathsf{S}\, \xi'^2 = 1, \quad \mathsf{S}\, \xi\xi' = 0, \quad \mathsf{S}\, \xi' d\xi = 0, \quad \mathsf{S}\, \xi d\xi' = 0,$$

$$\mathsf{S}\, d\xi^2 = -2e^\gamma\, d\alpha\, d\beta, \qquad \mathsf{S}\, d\xi'^2 = -2e^{-\gamma}\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\mathsf{S}\, d\xi\, d\xi' = -d\alpha^2 - d\beta^2.$$

Diese Relationen besagen aber, daß, wenn Fragen der Realität beiseite gelassen werden, die beiden Größenquadrupel ξ, η, ζ, τ und $\xi', \eta', \zeta', \tau'$ sich als Koordinaten zweier bezüglich des Absolutums polarreziproker Minimalflächen des sphärisch-elliptischen Raumes auffassen lassen. In diesem Zusammenhange begegnen wir dem System der Differentialgleichungen (10) bereits bei Darboux[22]). Dieses System ist andererseits — und das scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein — nur un-

[22]) Darboux, Leçons sur la théorie gén. des surf. 3, p. 471 ff.

wesentlich verschieden von demjenigen, auf das in der Calapso-Bianchischen Theorie[23]) die Bestimmung der Biegungsflächen des Paraboloids zurückgeführt wird. Man hat nun aber ein Hilfsmittel, um von einem Minimalflächenpaar des elliptischen Raumes zu einem Paar von Flächen von konstanter Krümmung des euklidischen zu gelangen und auch den umgekehrten Übergang zu bewerkstelligen. Es besteht in der Anwendung der zweifachen, sogenannten Cliffordschen Abbildung[24]), die dem Minimalflächenpaar des elliptischen Raumes die Bildkugeln eines Hazzidakisschen Paares von Flächen konstanter positiver Krümmung im euklidischen Raume zuordnet. Unter Hinzunahme der im nächsten Paragraphen zu entwickelnden Konstruktion der Biegungsfläche des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids auf Grund eines als bekannt vorausgesetzten Γ-Netzes der Einheitskugel wäre man demnach in der Lage, die Biegungsfläche des Paraboloids auch aus einem gegebenen Hazzidakisschen Paare von Flächen von konstanter Krümmung *im Raume zu konstruieren* und damit die bisherige rein analytische Methode in geometrischer Hinsicht wesentlich zu ergänzen[25]). Der Weg über die elliptische Geometrie erscheint indessen weder notwendig noch im Hinblick auf die angestrebte Aufdeckung geometrischer Beziehungen im euklidischen Raume besonders vorteilhaft. Wir werden auf das hier berührte Problem, die Biegungsflächen des Paraboloids aus Paaren von Flächen konstanter Krümmung zu konstruieren, im III. Kapitel zurückkommen, um es dort direkt anzugreifen. Vorerst handelt es sich darum, Einblick in zahlreiche geometrische Zusammenhänge zu gewinnen, zu denen ein auf der Kugel vorhandenes Γ-Netz Anlaß gibt.

§ 5.

Die mit dem Γ-Netz zusammenhängende Biegungsfläche des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids und ihre beiden ausgezeichneten Evolventenflächen.

1. Mit Hilfe eines auf der Einheitskugel als bekannt vorausgesetzten Γ-Netzes kann man nun in der Tat die laufenden Koordinaten x, y, z einer auf das gleichseitige hyperbolische Paraboloid abwickelbaren Fläche bilden. Dazu bedarf es dreier Quadraturen:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \int(\xi' d\vartheta + \xi d\vartheta'), \qquad y = \int(\eta' d\vartheta + \eta d\vartheta'), \\ \qquad\qquad z = \int(\zeta' d\vartheta + \zeta d\vartheta'), \end{cases}$$

[23]) S. z. B. Bianchi, Lezioni di geom. diff. **3** (1909), § 86.

[24]) Bianchi, Sulle superficie a linee di curvatura isoterme. Rend. Acc. dei Lincei (5) **12** (1903), p. 511.

[25]) Hingewiesen sei hier auf das bereits in der Einleitung auf S. 160 Gesagte.

wobei $\xi, \ldots, \xi', \ldots$ die durch die Formeln (7) von § 4 definierten Größen bedeuten. Man bestätigt leicht, daß unter den Integralzeichen exakte Differentiale stehen; aus § 4 (8) und (9) entnimmt man nämlich die Beziehungen:

$$\xi'_\beta \vartheta_\alpha = \xi_\alpha \vartheta'_\beta, \qquad \xi_\beta \vartheta'_\alpha = \xi'_\alpha \vartheta_\beta.$$

Wir berechnen das Quadrat des Linienelements und finden:

$$\begin{aligned}\sum dx^2 &= (1+\vartheta'^2)d\vartheta^2 + 2\vartheta\vartheta' d\vartheta d\vartheta' + (1+\vartheta^2)d\vartheta'^2 \\ &= d\vartheta^2 + d\vartheta'^2 + [d(\vartheta\vartheta')]^2.\end{aligned}$$

Die Fläche $(x, \ldots)$ ist demnach Biegungsfläche der Fläche:

$$x = \vartheta, \quad y = \vartheta', \quad z = \vartheta\vartheta',$$

d. h. also des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $z = xy$.

Schreibt man

$$dx = (\vartheta' X + X^{(1)})d\vartheta + (\vartheta X + X^{(2)})d\vartheta' = X^{(1)}d\vartheta + X^{(2)}d\vartheta' + X d(\vartheta\vartheta'),$$

so wird man auf ein bemerkenswertes Formelsystem geführt:

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = X^{(1)}dx + X^{(2)}dy + X dz, \\ dy = Y^{(1)}dx + Y^{(2)}dy + Y dz, \\ dz = Z^{(1)}dx + Z^{(2)}dy + Z dz. \end{cases}$$

Die geometrische Deutung ist die folgende:

Das rechtwinklige Dreikant, das ein auf der Kugel gegebenes Γ-Netz begleitet, definiert durch seine 9 Richtungskosinus eine orthogonale Substitution, durch die die jeweilige Drehung dargestellt wird, mittels derer das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, abgesehen von der erforderlichen Translation, in die betreffende, beim Rollen auf der Biegungsfläche eingenommene Stellung gebracht werden kann[26]).

2. Eine weitere Untersuchung knüpft sich an die Tatsache, daß ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' Integrale zweier Moutardscher Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \xi_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\xi, \qquad \xi'_{\alpha\beta} = e^{-\varphi}\xi'$$

sind. Es liegt hiernach nahe, mittels der bekannten Formeln von Lelieuvre zwei Flächen $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$ zu konstruieren, auf denen die Kurvennetze (α, β) die Asymptotenlinien bilden und deren Normalenkosinus proportional mit ξ, η, ζ bzw. mit ξ', η', ζ' sind:

[26]) Rollt eine Fläche auf einer Biegungsfläche, so berühren sich beide in zwei korrespondierenden Punkten derart, daß dort auch die korrespondierenden Fortschreitungsrichtungen zusammenfallen.

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = \int [(\eta\,\zeta_\alpha - \zeta\,\eta_\alpha)\,d\alpha - (\eta\,\zeta_\beta - \zeta\,\eta_\beta)\,d\beta], \\ \mathfrak{x}' = \int [(\eta'\,\zeta'_\alpha - \zeta'\,\eta'_\alpha)\,d\alpha - (\eta'\,\zeta'_\beta - \zeta'\,\eta'_\beta)\,d\beta]; \end{cases}$$

die Formeln für $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ erhält man durch zyklische Vertauschung innerhalb der Tripel ξ, η, ζ und ξ', η', ζ'.

Auf den Flächen $(\mathfrak{x}, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}', \ldots)$ stellen nun die Asymptotenlinien (α, β) *Gewebe* dar, so daß sich hier ein spezieller Fall der in § 1 behandelten Verhältnisse bietet. In der Tat ergibt sich mit Benutzung von § 4 (13), wobei wir übrigens gleich an Stelle von e^{φ} und $e^{-\varphi}$ bezüglich $\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta}$ und $\frac{\vartheta'_{\alpha\beta}}{\vartheta'}$ schreiben:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum d\mathfrak{x}^2 = (\vartheta_\alpha)^2\,d\alpha^2 + 2\left[\frac{1+\vartheta^2}{\vartheta}\,\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_\alpha\,\vartheta_\beta\right] d\alpha\,d\beta + (\vartheta_\beta)^2\,d\beta^2, \\ \sum d\mathfrak{x}'^2 = (\vartheta'_\alpha)^2\,d\alpha^2 + 2\left[\frac{1+\vartheta'^2}{\vartheta'}\,\vartheta'_{\alpha\beta} - \vartheta'_\alpha\,\vartheta'_\beta\right] d\alpha\,d\beta + (\vartheta'_\beta)^2\,d\beta^2. \end{cases}$$

Diese Formeln gehen auch aus § 1 (3) hervor, indem man dort ϑ (bzw. ϑ') für φ und $\Sigma\,\xi^2 = 1 + \vartheta^2$ (bzw. $1 + \vartheta'^2$) für ϱ einsetzt. Die Benutzung des Theorems von § 1 läßt dann unmittelbar erkennen, daß jede der beiden Flächen $(\mathfrak{x}, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}', \ldots)$ aus der Biegungsfläche eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, das eben ein spezielles gerades Konoid ist, in der am Schluß von § 2 angegebenen Weise als Evolventenfläche entsteht.

3. Wir beachten nun, daß sich das gleichseitige hyperbolische Paraboloid *auf doppelte Art* als gerades Konoid auffassen läßt. Es soll der Nachweis geführt werden, daß jede der beiden Flächen $(\mathfrak{x}, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}', \ldots)$, die Träger der asymptotischen Gewebe sind, als Evolventenfläche eines der beiden Systeme von verbogenen Erzeugenden zu derselben, durch (1) dargestellten Biegungsfläche des Paraboloids $z = x\,y$ gehört. Dazu muß natürlich über die in den Quadraturen (4) noch unbestimmt gebliebenen additiven Konstanten in geeigneter Weise verfügt werden.

Wir zeigen zunächst, daß man den Formeln (4) die folgende Gestalt geben kann:

$$(6)\qquad d\mathfrak{x} = \xi'\,d\vartheta - \vartheta'\,d\xi, \qquad d\mathfrak{x}' = \xi\,d\vartheta' - \vartheta\,d\xi'.$$

In der Tat ergibt sich mit Benutzung von § 4 (7) und (8) die folgende Umformung:

$$(7)\qquad \eta\,\zeta_\alpha - \zeta\,\eta_\alpha = \begin{vmatrix} \vartheta Y + Y^{(2)}, & \vartheta_\alpha Y \\ \vartheta Z + Z^{(2)}, & \vartheta_\alpha Z \end{vmatrix} = \vartheta_\alpha (Y^{(2)} Z - Z^{(2)} Y) = \vartheta_\alpha X^{(1)}$$
$$= \vartheta_\alpha\left(\xi' - \vartheta'\,\frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha}\right) = \xi'\,\vartheta_\alpha - \vartheta'\,\xi_\alpha$$

und auf analoge Weise:

(8) $$-(\eta\zeta_\beta - \zeta\,\eta_\beta) = \xi'\vartheta_\beta - \vartheta'\xi_\beta,$$

so daß die erste Formel (6) bereits bestätigt ist, während man bei der zweiten entsprechend zu verfahren hat.

Es kann nun aber mit Benutzung von (1)

(9) $$\mathfrak{x} = x - \vartheta'\xi, \qquad \mathfrak{x}' = x - \vartheta\,\xi'$$

gemacht werden. Danach sind also wirklich die Flächen $(\mathfrak{x}, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}', \ldots)$, deren Normalenkosinus mit ξ, η, ζ und mit ξ', η', ζ' proportional sind, Orthogonalflächen zu den beiden Normalenkongruenzen, die die Biegungsfläche $(x, \ldots)$ des Paraboloids $z = xy$ zum gemeinsamen Brennflächenmantel haben und von den Tangenten der verbogenen Erzeugenden $\vartheta =$ konst. und $\vartheta' =$ konst. gebildet werden.

4. Die beiden ausgezeichneten Evolventenflächen $(\mathfrak{x}, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}', \ldots)$, die zur Biegungsfläche eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids gehören, erscheinen nicht bloß als spezielle Flächen mit asymptotischen Geweben, sondern auch durch ihre Zugehörigkeit zu einer anderen Flächenklasse bemerkenswert.

Als *Flächen* P habe ich diejenigen Flächen bezeichnet, die bei Beziehung auf die Parameter α und β der Asymptotenlinien die charakteristische Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial\beta}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}$$

erfüllen[27]). Um nachzuweisen, daß die Fläche $(\mathfrak{x}, \ldots)$ eine P-Fläche ist, drücken wir ξ' zunächst linear durch $\xi, \xi_\alpha, \xi_\beta$ aus. Es wird:

(10) $$\xi' = \frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}\xi_\alpha + \frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}\xi_\beta - \frac{\vartheta}{\vartheta'}\xi,$$

was man durch Einsetzen der Ausdrücke

$$\xi = \vartheta X + X^{(2)}, \qquad \xi' = \vartheta' X + X^{(1)},$$

$$\xi_\alpha = \vartheta_\alpha X, \qquad \xi_\beta = \frac{1}{\vartheta'_\beta}\left[\frac{1}{2}(\vartheta^2 + \vartheta'^2 - 1)X + \vartheta' X^{(1)} + \vartheta X^{(2)}\right]$$

unter Heranziehung der Relation

$$2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2$$

bestätigt. Dem System der Differentialrelationen (10) von § 4 kann man mittels (10) die folgende Gestalt geben:

---

27) Jonas, Über eine Klasse von Flächen, die ein Gegenstück zu den von Demoulin und Tzitzéica betrachteten R-Flächen bilden. Berl. Math. Ges. Ber. 19 (1921), S. 18.

$$(11)\quad \begin{cases} \xi_{\alpha\alpha} = \left(\varphi_\alpha + \dfrac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}\right)\xi_\alpha + \dfrac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}\xi_\beta - \dfrac{\vartheta}{\vartheta'}\xi, \\ \xi_{\alpha\beta} = e^{\varphi}\xi, \\ \xi_{\beta\beta} = \dfrac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}\xi_\alpha + \left(\varphi_\beta + \dfrac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}\right)\xi_\beta - \dfrac{\vartheta}{\vartheta'}\xi. \end{cases}$$ [28])

Aus (4) folgt:

$$\mathfrak{x}_{\alpha\alpha} = \eta\zeta_{\alpha\alpha} - \zeta\eta_{\alpha\alpha}, \qquad \mathfrak{x}_{\beta\beta} = -(\eta\zeta_{\beta\beta} - \zeta\eta_{\beta\beta})$$

und mit Benutzung von (11):

$$\mathfrak{x}_{\alpha\alpha} = \left(\varphi_\alpha + \frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}\right)\mathfrak{x}_\alpha - \frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}\mathfrak{x}_\beta, \qquad \mathfrak{x}_{\beta\beta} = -\frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}\mathfrak{x}_\alpha + \left(\varphi_\beta + \frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}\right)\mathfrak{x}_\beta.$$

Mithin ist tatsächlich:

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{\vartheta'_\beta}{\vartheta'}, \qquad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{\vartheta'_\alpha}{\vartheta'}.$$

Bezüglich der P-Flächen sei erwähnt, daß sie eine ziemlich weitgehende Analogie mit den durch die Relation $\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}$ charakterisierten R-Flächen[29]) aufweisen, als deren Gegenstück sie sich geradezu auffassen lassen. Insbesondere gestatten sie wie diese asymptotische, d. h. durch W-Kongruenzen vermittelte Transformationen, durch die man aus einer Fläche neue Flächen derselben Klasse gewinnt. Für diese Transformationen gilt überdies ein Vertauschbarkeitssatz, auf Grund dessen sie sich zu geschlossenen viergliedrigen Zyklen zusammensetzen lassen, wobei sich die vierte, den Zyklus schließende Fläche aus den drei anderen mittels endlicher Operationen ergibt. Die betrachteten Evolventenflächen der auf das Paraboloid $z = xy$ abwickelbaren Flächen bieten sich also (wie übrigens auch die Minimalflächen, die ebenfalls spezielle P-Flächen sind) als Anwendungsobjekte für diese neue Theorie dar.

§ 6.

Zwei Γ-Netze in einem viergliedrigen Zyklus Laplacescher Transformationen.

1. Die Bestimmung des Γ-Netzes wurde in § 3 von den Differentialgleichungen

$$(1)\qquad 2\vartheta_\alpha\vartheta'_\alpha = 2\vartheta_\beta\vartheta'_\beta = 1 + \vartheta^2 + \vartheta'^2$$

[28]) S. ebenda das mit (1) bezeichnete Gleichungssystem.

[29]) S. die Noten von Demoulin (C. R. **153**, S. 590, 705, 727, 797) und Tzitzéica (C. R. **153**, S. 1127; **154**, S. 54, 1144); ferner Jonas. Über die Konstruktion der W-Kongruenzen usw. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereingg. **29** (1920), S. 40.

abhängig gemacht. Bei Beziehung auf das Γ-Netz wurde das Quadrat des Linienelements der Einheitskugel:

$$(2)\qquad \sum dX^2 = \frac{1}{(\vartheta_\alpha)^2}\,d\alpha^2 + \frac{1}{(\vartheta_\beta')^2}\,d\beta^2.$$

An dem Gleichungspaar (1) fällt die Symmetrie in den Größen ϑ und ϑ' auf. Es ist daher unmittelbar zu ersehen, daß auch durch

$$(3)\qquad \sum d\bar{X}^2 = \frac{1}{(\vartheta_\alpha')^2}\,d\alpha^2 + \frac{1}{(\vartheta_\beta)^2}\,d\beta^2$$

ein Γ-Netz auf der Einheitskugel definiert wird. Der geometrische Zusammenhang zwischen den beiden Γ-Netzen, deren zweites wir zur Unterscheidung mit $\bar{\Gamma}(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ bezeichnen, soll untersucht werden.

Nach § 4 (8) ist:

$$(4)\qquad X = \frac{\xi_\alpha}{\vartheta_\alpha} = \frac{\xi_\beta'}{\vartheta_\beta'},$$

woraus man auf das Bestehen der analogen Formeln schließen darf:

$$(5)\qquad \bar{X} = \frac{\xi_\alpha'}{\vartheta_\alpha'} = \frac{\xi_\beta}{\vartheta_\beta}.$$

Mit Benutzung von § 4 (9) findet man also als laufende Koordinaten des dieselbe Einheitskugel bedeckenden Netzes $\bar{\Gamma}(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$:

$$(6)\qquad \bar{X} = \frac{1}{1+\vartheta^2+\vartheta'^2}\left[(\vartheta^2+\vartheta'^2-1)X + 2\vartheta' X^{(1)} + 2\vartheta X^{(2)}\right], \ldots$$

Schreibt man $\bar{X}, \ldots, \bar{X}^{(1)}, \ldots, \bar{X}^{(2)}, \ldots$ für die Richtungskosinus des begleitenden rechtwinkligen Dreikants, so daß

$$(7)\qquad \bar{X}_\alpha = \frac{1}{\vartheta_\alpha'}\bar{X}^{(1)}, \qquad \bar{X}_\beta = \frac{1}{\vartheta_\beta}\bar{X}^{(2)}$$

wird, so gelten die zu § 4 (6) analogen Differentialrelationen, die aus diesen durch Vertauschung von ϑ und ϑ' hervorgehen. Dabei ist:

$$(8)\qquad \begin{cases} \bar{X}^{(1)} = \dfrac{1}{1+\vartheta^2+\vartheta'^2}\left[2\vartheta X - 2\vartheta\vartheta' X^{(1)} + (1+\vartheta'^2-\vartheta^2)X^{(2)}\right], \\[2ex] \bar{X}^{(2)} = \dfrac{1}{1+\vartheta^2+\vartheta'^2}\left[2\vartheta' X + (1+\vartheta^2-\vartheta'^2)X^{(1)} - 2\vartheta\vartheta' X^{(2)}\right]. \end{cases}$$

Damit ist eine Transformation der Γ-Netze auf der Kugel gewonnen. Diese hat aber, wie offenbar ist, involutorischen Charakter und kann infolgedessen nicht dazu benutzt werden, aus einem gegebenen Γ-Netze beliebig viele neue zu erzeugen. Die Frage nach Transformationen, die einem solchen Zwecke dienen, soll uns hier nicht beschäftigen. Ihre Existenz ist übrigens nicht zweifelhaft, da eine derartige Theorie mit der Trans-

formationstheorie für die Biegungsflächen des Paraboloids $z = xy$ parallel laufen würde.

2. Wir betrachten nun die beiden Flächen γ und γ' mit den Koordinaten

$$\frac{\xi}{\vartheta}, \frac{\eta}{\vartheta}, \frac{\zeta}{\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{\xi'}{\vartheta'}, \frac{\eta'}{\vartheta'}, \frac{\zeta'}{\vartheta'},$$

für die wir keine besonderen Bezeichnungen einführen wollen. Da $\xi, \ldots, \vartheta$ einerseits und $\xi', \ldots, \vartheta'$ andrerseits Integrale je einer Moutardschen Gleichung sind, so stellen auf den Flächen γ und γ' die Kurven (α, β) *konjugierte Systeme mit gleichen Invarianten* dar. Wir wollen, einem durchaus üblichen Sprachgebrauche folgend, die konjugierten Systeme einfach mit ihren Trägern identifizieren und kurz von den konjugierten Systemen $\gamma\left(\frac{\xi}{\vartheta}, \ldots\right)$ und $\gamma'\left(\frac{\xi'}{\vartheta'}, \ldots\right)$ sprechen.

Korrespondierende Punkte von γ und γ' liegen wegen

$$\sum \left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\vartheta^2}, \quad \sum \left(\frac{\xi'}{\vartheta'}\right)^2 = 1 + \frac{1}{\vartheta'^2}$$

außerhalb der Einheitskugel und sind wegen

$$\sum \frac{\xi}{\vartheta} \frac{\xi'}{\vartheta'} = 1$$

konjugierte Pole. Da ferner

$$\sum \xi' d\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right) = 0, \quad \sum \xi d\left(\frac{\xi'}{\vartheta'}\right) = 0$$

ist, so ist die Tangentialebene von γ gleichzeitig Polarebene des korrespondierenden Punktes von γ' und umgekehrt. Die beiden konjugierten Systeme γ und γ' sind also polarreziprok in bezug auf die Kugel.

Den geometrischen Zusammenhang zwischen den konjugierten Systemen γ und γ' und den Orthogonalsystemen Γ und $\overline{\Gamma}$ der Einheitskugel entnimmt man den beiden folgenden Formelgruppen, die man leicht auf Grund der früheren Relationen bestätigt:

$$\text{(A)} \quad \frac{\xi}{\vartheta} = X + \frac{1}{\vartheta} X^{(2)} = \overline{X} + \frac{1}{\vartheta} \overline{X}^{(1)}, \qquad \frac{\xi'}{\vartheta'} = X + \frac{1}{\vartheta'} X^{(1)} = X + \frac{1}{\vartheta'} \overline{X}^{(2)},$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} X = \dfrac{\xi}{\vartheta} + \dfrac{\vartheta}{\vartheta_\alpha} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\xi}{\vartheta}\right) = \dfrac{\xi'}{\vartheta'} + \dfrac{\vartheta'}{\vartheta'_\beta} \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{\xi'}{\vartheta'}\right), \\[2ex] \overline{X} = \dfrac{\xi}{\vartheta} + \dfrac{\vartheta}{\vartheta_\beta} \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{\xi}{\vartheta}\right) = \dfrac{\xi'}{\vartheta'} + \dfrac{\vartheta'}{\vartheta'_\alpha} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\xi'}{\vartheta'}\right). \end{cases}$$

Die Gruppe (A) besagt, daß die Punkte von γ und γ' auf den Tangenten an die Kurven der Netze Γ und $\overline{\Gamma}$ liegen, die Gruppe (B), daß sich auch umgekehrt die Punkte von Γ und $\overline{\Gamma}$ auf den Tangenten der konjugierten Systeme γ und γ' befinden. Die Netze Γ und $\overline{\Gamma}$, die als

Orthogonalsysteme der Kugel gleichzeitig konjugierte Systeme vorstellen, schließen sich also mit γ und γ' in der Folge $\Gamma\gamma\bar{\Gamma}\gamma'\Gamma$ derart zu einem Zyklus zusammen, daß immer die α-Tangente der einen Fläche β-Tangente der folgenden wird. Es gilt also der Satz:

Die konjugierten Systeme Γ, γ, $\bar{\Gamma}$ und γ', von denen Γ und $\bar{\Gamma}$ als Orthogonalsysteme der bezeichneten Art dieselbe Einheitskugel bedecken, sind untereinander durch einen viergliedrigen Zyklus Laplacescher Transformationen verbunden.

Es mag noch folgende Bemerkung hier Platz finden. Ist auf der Kugel irgendein rechtwinkliges Kurvennetz gegeben, so werden die beiden durch die Laplacesche Transformation daraus hervorgehenden konjugierten Systeme von den Polen der Schmiegungsebenen beschrieben, mit anderen Worten: der von dem zweiten Brennpunkt z. B. der α-Tangente an die Kugel gelegte Tangentenkegel berührt diese längs des Krümmungskreises der β-Kurve.

Im vorliegenden Falle des Γ-Netzes fällt nun der zweite Brennpunkt der α-Tangente von Γ mit dem zweiten Brennpunkt der β-Tangente von $\bar{\Gamma}$ zusammen. Wir dürfen also schließen:

Die Kurven der Netze Γ und $\bar{\Gamma}$ haben in korrespondierenden Punkten die Krümmungskreise gemein und zwar so, daß der Krümmungskreis der α-Kurve des einen gleichzeitig Krümmungskreis der β-Kurve des anderen Netzes ist.

Daß man die Punkte des Netzes $\bar{\Gamma}$ als zweite Schnittpunkte der Paare von Krümmungskreisen in den entsprechenden Punkten von Γ erhält, wird durch die Formeln (6) zum Ausdruck gebracht.

3. Die konjugierten Systeme γ und γ' mit den laufenden Koordinaten $\frac{\xi}{\vartheta}, \ldots$ und $\frac{\xi'}{\vartheta'}, \ldots$ bilden ein bemerkenswertes Beispiel innerhalb einer von Guichard[30]) und Calapso[31]) untersuchten Klasse, die durch die

[30]) Guichard, C. R. **132** (1901), S. 249.

[31]) Calapso, Un problema sui sistemi di linee fra loro coniugate e sulle relative trasformazioni di Laplace. Annali di Mat. (3) **13** (1907), S. 203. — Den Ausgangspunkt für den ziemlich komplizierten analytischen Prozeß, der der Bestimmung eines G-Systems entspricht, bildet ein Lösungspaar ω, H der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{H} \sin \omega, \qquad \cos \omega = H^2 - H \frac{\partial^2 \log H}{\partial u\, \partial v}$$

(u und v entsprechen unseren Parametern α und β). Calapso bemerkte bereits selber, daß für $\cos \omega = \pm 1$, wenn $H = e^{\Theta}$ gesetzt wird, einfach $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \sinh \Theta$ bzw. $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} = 2 \cosh \Theta$ wird, daß also spezielle G-Systeme existieren müssen, die mit der Verbiegung der Paraboloide zusammenhängen. Auf eine über diese Feststellung hinausgehende Behandlung des Spezialfalls verzichtet die Calapsosche Abhandlung.

Eigenschaft ausgezeichnet ist, daß die nach beiden Seiten genommenen Laplaceschen Transformierten Orthogonalsysteme, d. h. also Krümmungsliniennetze darstellen. Hinsichtlich dieser *G-Systeme*, wie sie Calapso nennt, ist hier in erster Linie zu erwähnen, daß die besagte Eigenschaft auf einer Besonderheit der sphärischen Abbildung beruht, so daß jedes Parallelsystem zu einem G-System wieder ein solches ist. Es gilt ferner der Satz, daß die Gesamtheit der zu einer derartigen sphärischen Abbildung gehörigen G-Systeme, zwei G-Systeme mit gleichen Invarianten aufweist. Die von Calapso angegebene Form des Linienelements[33]) einer Fläche, die Träger eines solchen ausgezeichneten G-Systems mit gleichen Invarianten ist, läßt erkennen, daß das betreffende Kurvennetz ein Gewebe ist. Wir haben hier also Beispiele für *konjugierte Gewebe*.

Was nun unsere konjugierten Systeme γ und γ' betrifft, so stellen diese G-Systeme mit gleichen Invarianten dar. In der Tat erhält man auch das Linienelement eines Gewebes, so z. B. für γ:

$$\sum\left[d\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)\right]^2=\frac{d\vartheta^2}{\vartheta^4}-\frac{2e^{\varphi}}{\vartheta^2}\,d\alpha\,d\beta.$$

§ 7.

Konstruktion gewisser Flächen mit Γ-Netzen als sphärischen Bildern der Krümmungslinien.

1. Die folgende Untersuchung knüpft sich unmittelbar an die am Schluß des vorigen Paragraphen konstatierte Eigenschaft der konjugierten Systeme $\gamma\left(\frac{\xi}{\vartheta},\ldots\right)$ und $\gamma'\left(\frac{\xi'}{\vartheta'},\ldots\right)$, zwei G-Systeme mit gleichen Invarianten vorzustellen. Es liegt nun nahe, nach den *beiden zu γ und γ' parallelen G-Systemen mit ebenfalls gleichen Invarianten* zu fragen und nachzuforschen, was durch diesen Übergang aus dem Zyklus Laplacescher Transformationen wird, der γ und γ' mit den beiden Netzen Γ und $\overline{\Gamma}$ der Kugel verband.

Die zu bildenden Parallelsysteme zu γ und γ' seien mit $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ bezeichnet, ihre laufenden Koordinaten mit $\tilde{\mathfrak{x}}$, $\tilde{\mathfrak{y}}$, $\tilde{\mathfrak{z}}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}'$, $\tilde{\mathfrak{y}}'$, $\tilde{\mathfrak{z}}'$. Die Laplacesche Gleichung von γ geht aus der Moutardschen Gleichung $\xi_{\alpha\beta}=e^{\varphi}\xi$ hervor und lautet:

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\vartheta_\beta}{\vartheta}\,\frac{\partial\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)}{\partial\alpha}+\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta}\,\frac{\partial\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)}{\partial\beta}=0.$$

---

[33]) Calapso gibt (a. a. O. S. 216) die folgenden Formeln:

$$\sqrt{E}=e^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u},\quad F=e^{2\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v};\quad \sqrt{G}=e^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Wir haben demnach

$$\tilde{\mathfrak{x}}_\alpha = -\vartheta^2 \frac{\partial\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)}{\partial\alpha}, \quad \tilde{\mathfrak{x}}_\beta = \vartheta^2 \frac{\partial\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right)}{\partial\beta}$$

zu nehmen, so daß

$$(1) \qquad \tilde{\mathfrak{x}} = \int [(\xi\vartheta_\alpha - \xi_\alpha\vartheta)\,d\alpha - (\xi\vartheta_\beta - \xi_\beta\vartheta)\,d\beta]$$

wird. Die Laplacesche Gleichung mit gleichen Invarianten, der $\tilde{\mathfrak{x}}$, $\tilde{\mathfrak{y}}$, $\tilde{\mathfrak{z}}$ genügen, ist dann:

$$\tilde{\mathfrak{x}}_{\alpha\beta} - \frac{\vartheta_\beta}{\vartheta}\tilde{\mathfrak{x}}_\alpha - \frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta}\tilde{\mathfrak{x}}_\beta = 0.$$

In entsprechender Weise sind $\tilde{\mathfrak{x}}'$, $\tilde{\mathfrak{y}}'$, $\tilde{\mathfrak{z}}'$ zu berechnen:

$$(2) \qquad \tilde{\mathfrak{x}}' = \int [(\xi'\vartheta'_\alpha - \xi'_\alpha\vartheta')\,d\alpha - (\xi'\vartheta'_\beta - \xi'_\beta\vartheta')\,d\beta].$$

Es bestehen nun aber die Identitäten

$$\xi\vartheta_\alpha - \xi_\alpha\vartheta = \zeta'\eta_\alpha - \eta'\zeta_\alpha, \qquad -(\xi\vartheta_\beta - \xi_\beta\vartheta) = \zeta'\eta_\beta - \eta'\zeta_\beta,$$

die man in der gleichen Weise wie die Relationen (7) und (8) von § 5 herleitet. Wir erhalten danach für $\tilde{\mathfrak{x}}, \ldots$ und auf analoge Art für $\tilde{\mathfrak{x}}', \ldots$ die folgende neue Darstellung

$$(3) \qquad \tilde{\mathfrak{x}} = \int (\zeta'd\eta - \eta'd\zeta), \qquad \tilde{\mathfrak{x}}' = \int (\zeta\,d\eta' - \eta\,d\zeta').$$

Als G-Systeme mit gleichen Invarianten sind auch $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ Gewebe; man findet in der Tat mit Benutzung von § 4 (13):

$$\sum d\tilde{\mathfrak{x}}^2 = d\vartheta^2 - 2e^{\varphi}(1+\vartheta'^2)\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\sum d\tilde{\mathfrak{x}}'^2 = d\vartheta'^2 - 2e^{-\varphi}(1+\vartheta^2)\,d\alpha\,d\beta.$$

2. Zwischen den beiden konjugierten Systemen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ läßt sich, indem man ihnen eine geeignete relative Lage gibt, ein infolge seiner Einfachheit bemerkenswerter geometrischer Zusammenhang herstellen. Die eine der beiden durch (3) geforderten Reihen von Quadraturen, z. B. für $\tilde{\mathfrak{x}}'$, $\tilde{\mathfrak{y}}'$, $\tilde{\mathfrak{z}}'$, ist nämlich, wie man unmittelbar bestätigt, entbehrlich und kann durch die Relationen

$$(4) \qquad \tilde{\mathfrak{x}}' - \tilde{\mathfrak{x}} = \eta'\zeta - \zeta'\eta, \ldots$$

ersetzt werden. Danach sind aber die Flächen $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$, deren Normalenkosinus sich wie $\xi':\eta':\zeta'$ bzw. wie $\xi:\eta:\zeta$ verhalten, die beiden Brennflächenmäntel einer Linienkongruenz. Diese ist übrigens eine W-Kongruenz, d. h. ausgezeichnet durch die Eigenschaft, daß sich auf den Brennflächenmänteln die Asymptotenlinien entsprechen. Die Rechnung zeigt, daß beide Male die Asymptotenlinien die Kurven $\alpha \pm \beta =$ konst. sind. Man kann sich zum Beweise aber auch einfach auf die Tatsache stützen, daß sich auf den Brennflächenmänteln $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ nicht bloß, wie das bei jeder Linien-

kongruenz der Fall ist, die zu den Developpabeln gehörigen konjugierten Systeme, sondern auch die mit diesen nicht zusammenfallenden konjugierten Systeme (α, β) entsprechen. Man schließt daraus auf die Korrespondenz aller konjugierten Systeme sowie der Asymptotenlinien von $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$.

3. Wir bestimmen jetzt die auf ihre Krümmungslinien (α, β) bezogenen Paare von Flächen $(x_1, \ldots)$, $(x_2, \ldots)$ und $(x_1', \ldots)$, $(x_2', \ldots)$, die aus $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ durch die Laplaceschen Transformationen hervorgehen. Dabei mögen die durch den Index 1 gekennzeichneten Krümmungsliniennetze von den zweiten Brennpunkten der α-Tangenten, die mit dem Index 2 versehenen von den Brennpunkten der β-Tangenten beschrieben werden.

Von vornherein ist übrigens klar, daß diesmal die Laplaceschen Transformierten nicht paarweise zusammenfallen können, daß also kein viergliedriger Zyklus Laplacescher Transformationen vorliegt. Da nämlich die Tangentialebenen von $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\gamma}'$ sich längs der Verbindungslinie der korrespondierenden Punkte beider Flächen schneiden, so ist notwendig die α-(bzw. β-) Tangente von $\tilde{\gamma}$ windschief zur β-(bzw. α-) Tangente von $\tilde{\gamma}'$. Immerhin liegen auch hier so einfache geometrische Verhältnisse vor, daß ihre Feststellung von Interesse erscheint.

Aus $\tilde{\gamma}(\bar{\mathfrak{x}}, \ldots)$ gehen die Flächen $(x_1, \ldots)$, $(x_2, \ldots)$ hervor, gegeben durch:

$$x_1 = \bar{\mathfrak{x}} - \frac{\vartheta}{\vartheta_\alpha}\bar{\mathfrak{x}}_\alpha = \bar{\mathfrak{x}} - \vartheta X^{(2)}, \tag{5}$$

$$x_2 = \bar{\mathfrak{x}} - \frac{\vartheta}{\vartheta_\beta}\bar{\mathfrak{x}}_\beta = \bar{\mathfrak{x}} + \vartheta \bar{X}^{(1)}, \tag{6}$$

und aus $\tilde{\gamma}'(\bar{\mathfrak{x}}', \ldots)$ die Flächen $(x_1', \ldots)$ und $(x_2', \ldots)$:

$$x_1' = \bar{\mathfrak{x}}' - \frac{\vartheta'}{\vartheta_\alpha'}\bar{\mathfrak{x}}_\alpha' = \bar{\mathfrak{x}}' - \vartheta' \bar{X}^{(2)}, \tag{7}$$

$$x_2' = \bar{\mathfrak{x}}' - \frac{\vartheta'}{\vartheta_\beta'}\bar{\mathfrak{x}}_\beta' = \bar{\mathfrak{x}}' + \vartheta' X^{(1)}. \tag{8}$$

Dabei sind die Ausdrücke für $\bar{X}^{(1)}$ und $\bar{X}^{(2)}$ den Formeln § 6 (8) zu entnehmen.

4. Wir beachten nun, daß nach (4)

$$\bar{\mathfrak{x}}' - \bar{\mathfrak{x}} = \eta'\zeta - \zeta'\eta = X - \vartheta' X^{(1)} - \vartheta X^{(2)} = -\bar{X} + \vartheta \bar{X}^{(1)} + \vartheta' \bar{X}^{(2)}$$

wird, und erhalten mit Benutzung dieser Beziehungen durch Subtraktion von (8) und (5) einerseits, von (6) und (7) andrerseits:

$$x_2' - x_1 = X, \quad x_2 - x_1' = \bar{X}. \tag{9}$$

Es ist ferner, wie ersichtlich:

$$(10)\qquad \begin{cases} \sum(x_1-\bar{\xi})X=0, & \sum(x_2'-\bar{\xi}')X=0, \\ \sum(x_2-\bar{\xi})\bar{X}=0, & \sum(x_1'-\bar{\xi}')\bar{X}=0. \end{cases}$$

Die Relationen (9) und (10) besagen aber, daß man die korrespondierenden Punkte der beiden Paare Laplacescher Transformierter von $\bar{y}$ und $\bar{y}'$ als Fußpunkte der beiden Minimalabstände zwischen der α-Tangente der einen und der β-Tangente der anderen Fläche erhält. Diese Minimalabstände haben die Richtungen $(X, \ldots)$ und $(\bar{X}, \ldots)$ der zu den Netzen Γ und $\bar{\Gamma}$ gehörigen Kugelradien und, wie man aus (9) schließt, die konstante Länge 1.

Wir zeigen nun weiter, daß die Minimalabstände der beiden Tangentenpaare Normalen der von ihren Fußpunkten beschriebenen Krümmungsliniennetze sind. Damit ist dann gleichzeitig festgestellt, daß die Flächen $(x_1, \ldots)$, $(x_2', \ldots)$ einerseits und die Flächen $(x_2, \ldots)$, $(x_1', \ldots)$ anderseits Paare von Parallelflächen mit dem konstanten Normalabstande 1 sind.

Zu diesem Zwecke bilden wir nach (5) und (1) und unter Heranziehung von § 4 (6) bis (9) sowie von § 6 (7) und (8) die Differentiale der Koordinaten für die beiden Flächenpaare und fügen die Ausdrücke für dX und $d\bar{X}$ hinzu:

$$\begin{cases} dx_1 = \dfrac{\vartheta^2}{\vartheta_\alpha} X^{(1)} d\alpha - \dfrac{\vartheta'^2+1}{\vartheta'_\beta} X^{(2)} d\beta, \quad dx_2' = \dfrac{\vartheta^2+1}{\vartheta_\alpha} X^{(1)} d\alpha - \dfrac{\vartheta'^2}{\vartheta'_\beta} X^{(2)} d\beta, \\ \qquad dX = \dfrac{1}{\vartheta_\alpha} X^{(1)} d\alpha + \dfrac{1}{\vartheta'_\beta} X^{(2)} d\beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_2 = \dfrac{\vartheta'^2+1}{\vartheta'_\alpha} \bar{X}^{(1)} - \dfrac{\vartheta^2}{\vartheta_\beta} \bar{X}^{(2)} d\beta, \quad dx_1' = \dfrac{\vartheta'^2}{\vartheta'_\alpha} \bar{X}^{(1)} d\beta - \dfrac{\vartheta^2+1}{\vartheta_\beta} \bar{X}^{(2)} d\beta, \\ \qquad d\bar{X} = \dfrac{1}{\vartheta'_\alpha} \bar{X}^{(1)} + \dfrac{1}{\vartheta_\beta} \bar{X}^{(2)} d\beta. \end{cases}$$

Diese beiden Formelgruppen gestatten, die behaupteten Eigenschaften der vier Flächen unmittelbar abzulesen. Sie lassen außerdem erkennen, daß $-\vartheta^2$, ϑ'^2+1 die beiden Hauptkrümmungsradien von $(x_1, \ldots)$ und $-(\vartheta'^2+1)$, ϑ^2 diejenigen von $(x_2, \ldots)$ sind. Die beiden Laplaceschen Transformierten von $\bar{y}$ sind also zwei mit Korrespondenz der Krümmungslinien aufeinander bezogene Flächen, die überdies in entsprechenden Punkten (wenn von der an sich belanglosen gleichzeitigen Änderung beider Vorzeichen abgesehen wird) gleiche Hauptkrümmungsradien, aber in umgekehrter Zuordnung zu den Krümmungslinien besitzen.

Wir fassen die geometrischen Ergebnisse des vorliegenden Paragraphen zusammen:

Die konjugierten Systeme $\bar{\gamma}$ *und* $\bar{\gamma}'$, *die als Parallelsysteme mit ebenfalls gleichen Invarianten aus den Systemen* $\gamma\left(\frac{\xi}{\vartheta}, \ldots\right)$ und $\gamma'\left(\frac{\xi'}{\vartheta'}, \ldots\right)$ *hervorgingen, bilden die Brennflächenmäntel einer W-Kongruenz. Ihre Laplaceschen Transformierten sind vier Orthogonalsysteme und lassen sich zu zwei Paaren von Parallelflächen mit dem Normalabstande* 1 *und mit den Netzen* Γ *und* $\bar{\Gamma}$ *als sphärischen Bildern der Krümmungslinien zusammenfassen. Die Normalen dieser Parallelflächenpaare sind die gemeinsamen Lote zu ungleichnamigen Tangenten der Netze* $\bar{\gamma}$ *und* $\bar{\gamma}'$, *ihre Punkte die Fußpunkte dieser, die konstante Länge* 1 *besitzenden Minimalabstände. Die beiden Laplaceschen Transformierten von* $\bar{\gamma}$ (*oder in geeigneter Weise gewählte Parallelflächen dazu wie die Laplaceschen Transformierten von* $\bar{\gamma}'$) *liefern ein Beispiel für ein Paar von Flächen, deren Krümmungslinien sich entsprechen und deren Hauptkrümmungsradien beim Übergang von der einen zur anderen Fläche ihre Werte vertauschen.*

5. Wir beschließen dieses Kapitel unter Hinweis auf die Bemerkung am Ende von § 4, indem wir zeigen, daß die entwickelten geometrischen Eigenschaften der vier Flächen $(\mathfrak{x}, \ldots)$, $(\mathfrak{x}', \ldots)$, $(\bar{\mathfrak{x}}, \ldots)$, $(\bar{\mathfrak{x}}', \ldots)$, von denen die beiden ersten, die Evolventenflächen der auf das Paraboloid $z = xy$ abwickelbaren Fläche, Träger asymptotischer Gewebe und die beiden anderen Träger konjugierten Gewebe waren, eine reelle Deutung für gewisse Paare von imaginären Flächen von konstanter positiver Krümmung darstellen.

Nach § 5 (6), (9) und nach (3) und (4) im vorliegenden Paragraphen ist:

$$\mathfrak{x} = \int (\xi' d\vartheta - \vartheta' d\xi), \qquad \mathfrak{x}' = \int (\xi d\vartheta' - \vartheta d\xi'), \qquad \mathfrak{x} - \mathfrak{x}' = \vartheta\xi' - \vartheta'\xi,$$

$$\bar{\mathfrak{x}} = \int (\zeta' d\eta - \eta' d\zeta), \qquad \bar{\mathfrak{x}}' = \int (\zeta d\eta' - \eta d\zeta'), \qquad \bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{x}}' = \eta\zeta' - \zeta\eta'.$$

Bei den nun erforderlichen Rechnungen werden die Formeln (13) von § 4 gebraucht.

Wir betrachten die Punkte $(\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z})$ und $(\Xi^*, \mathrm{H}^*, \mathrm{Z}^*)$, gegeben durch:

$$\Xi = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}' + i(\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{x}}') = \vartheta\xi' - \xi\vartheta' + i(\eta\zeta' - \zeta\eta'),$$

$$\Xi^* = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}' - i(\bar{\mathfrak{x}} - \bar{\mathfrak{x}}') = \vartheta\xi' - \xi\vartheta' - i(\eta\zeta' - \zeta\eta').$$

Sie gehören, da, wie man unschwer nachweist,

$$\sum \Xi^2 = 1, \qquad \sum \Xi^{*2} = 1$$

ist, dem idealen Gebiet der Einheitskugel an. Durch ähnliche lineare

Verbindung der Koordinaten bilden wir die imaginären Flächen (ξ, η, ζ) und (ξ^*, η^*, ζ^*):

$$\xi = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}' + i(\tilde{\mathfrak{x}} + \tilde{\mathfrak{x}}'),$$

$$\xi^* = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}' - i(\tilde{\mathfrak{x}} + \tilde{\mathfrak{x}}').$$

Wir wollen nun zeigen, daß $(\xi, \ldots)$ und $(\xi^*, \ldots)$ zwei Biegungsflächen der Einheitskugel und überdies ein *Hazzidakissches Paar* darstellen, d. h. *punktweise derart aufeinander bezogen wird, daß bei der Abwicklung der einen Fläche auf die Bildkugel der anderen korrespondierende Punkte zur Deckung gelangen.*

Man findet zunächst:

$$\sum \Xi\, d\xi = 0, \qquad \sum \Xi^* d\xi^* = 0;$$

das bedeutet aber, daß $(\Xi, \ldots)$ die Bildkugel von $(\xi, \ldots)$ und $(\Xi^*, \ldots)$ die Bildkugel von $(\xi^*, \ldots)$ ist.

Um nun zu zeigen, daß jede der beiden Flächen sich in der gedachten Weise auf die Bildkugel der anderen abwickeln läßt, überzeugen wir uns zunächst von der Richtigkeit der Beziehungen:

$$\sum d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x}' - \sum d\tilde{\mathfrak{x}}\, d\tilde{\mathfrak{x}}' = 0, \qquad \sum d\mathfrak{x}\, d\tilde{\mathfrak{x}} = 0, \qquad \sum d\mathfrak{x}'\, d\tilde{\mathfrak{x}}' = 0.$$

Mit Benutzung dieser Formeln ergibt sich dann in der Tat:

$$\sum d\xi^2 = \sum d\Xi^{*2}$$

$$= \sum d\mathfrak{x}^2 + \sum d\mathfrak{x}'^2 - \sum d\tilde{\mathfrak{x}}^2 - \sum d\tilde{\mathfrak{x}}'^2 + 2i\left(\sum d\mathfrak{x}\, d\tilde{\mathfrak{x}}' + \sum d\mathfrak{x}'\, d\tilde{\mathfrak{x}}\right),$$

$$\sum d\xi^{*2} = \sum d\Xi^2$$

$$= \sum d\mathfrak{x}^2 + \sum d\mathfrak{x}'^2 - \sum d\tilde{\mathfrak{x}}^2 - \sum d\tilde{\mathfrak{x}}'^2 - 2i\left(\sum d\mathfrak{x}\, d\tilde{\mathfrak{x}}' + \sum d\mathfrak{x}'\, d\tilde{\mathfrak{x}}\right).$$

Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen. Auf die weitere Reduktion dieser Linienelemente verzichten wir mit Rücksicht auf Kapitel III, in dessen Mittelpunkt ein *reelles* Hazzidakissches Paar steht.

Kapitel III.

Die Beziehung der (reellen) Biegungsflächen des Paraboloids $z = ixy$, d. h. der Flächen vom Typus $ds^2 = (1-v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1-u^2)dv^2$ zu den Hazzidakisschen Paaren von Flächen von konstanter positiver Krümmung.

§ 8.

Eine Eigenschaft zweier mit der Biegungsfläche starr verbundener Linienkongruenzen.

1. Um nun den Fall eines reellen Paares von Flächen konstanter positiver Krümmung, verbunden durch die Hazzidakissche Transformation ins Auge fassen zu können, betrachten wir eine Biegungsfläche vom Typus:

$$ds^2 = (1-v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1-u^2)dv^2, \tag{1}$$

die wir, da

$$x = u, \quad y = v, \quad z = iuv$$

genommen werden kann, als Biegungsfläche des imaginären gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $z = ixy$ ansprechen können. Wir legen Wert darauf, nicht gleich von einem Hazzidakisschen Paare auszugehen, wie es schließlich zur Konstruktion einer Biegungsfläche vom Typus (1) benutzt werden soll, sondern unsere Untersuchung zunächst ausschließlich auf den vorliegenden Ausdruck für das Quadrat des Linienelements zu stützen.

Es sei also (x, y, z) eine Fläche, deren Linienelement durch (1) gegeben sei. Mit X, Y, Z seien die Normalenkosinus, mit E, F, G, L, M, N die flächentheoretischen Fundamentalgrößen bezeichnet. Es ist:

$$E = 1 - v^2, \quad F = -uv, \quad G = 1 - u^2,$$
$$EG - F^2 = 1 - u^2 - v^2 = H.$$

Da

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\frac{v}{H}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\frac{u}{H}$$

wird, gelten die Relationen:

$$x_{uu} = LX, \quad x_{uv} = -\frac{v}{H}x_u - \frac{u}{H}x_v + MX, \quad x_{vv} = NX. \tag{2}$$

Die Fundamentalgrößen 2. Ordnung L, M, N, durch die erst die Gestalt der Biegungsfläche im Raume definiert wird, müssen die Codazzischen Gleichungen und die Gaußsche Gleichung erfüllen:

(3) $L_v - M_u + \frac{v}{H} L + \frac{u}{H} M = 0, \qquad N_u - M_v + \frac{u}{H} N + \frac{v}{H} M = 0,$

(4) $$LN - M^2 = \frac{1}{H}.$$

Bemerkt sei noch, daß das Krümmungsmaß der Fläche positiv ist; es wird:

$$K = \frac{1}{H^2} = \frac{1}{(1 - u^2 - v^2)^2}.$$

2. Wir beachten nun, daß durch die Formeln

(5) $$\begin{cases} \mathfrak{X} = u x_u - v x_v + X\sqrt{H}, \\ \overline{\mathfrak{X}} = u x_u - v x_v - X\sqrt{H} \end{cases} \qquad (H = 1 - u^2 - v^2)$$

zwei Punkte $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{Z}})$ auf der Einheitskugel um den Koordinatenanfang bestimmt werden. Von dem Punkte $(x, \ldots)$ unserer Biegungsfläche lassen wir zwei Strahlen mit den durch die Kosinus $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und $\overline{\mathfrak{X}}, \overline{\mathfrak{Y}}, \overline{\mathfrak{Z}}$ definierten Richtungen ausgehen. Diese liegen in der Ebene des die Kurve $uv =$ konst. berührenden Normalschnitts symmetrisch zur Tangentialebene, mit der sie den durch $\cos\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ gegebenen Winkel ω einschließen.

Danach ist also die Orientierung der beiden Strahlen relativ zu dem von den Tangenten der Parameterlinien und der Flächennormale gebildeten Dreikant unabhängig von der jeweiligen Gestalt der Biegungsfläche im Raume, so daß beim Übergang zu einer neuen Gestalt die beiden aus der Gesamtheit der Strahlen bestehenden Linienkongruenzen in starrer Verbindung mit den Flächenelementen mitgeführt werden. Nach Bianchi[33]) wird bekanntlich eine derartige auf eine Linienkongruenz ausgeübte Operation als eine *Verbiegung der Kongruenz im Beltramischen Sinne* bezeichnet.

Von wesentlicher Bedeutung für das Folgende ist die durch die beiden Linienkongruenzen vermittelte und durch die Formeln (5) gegebene doppelte Abbildung der betrachteten Biegungsfläche auf die Einheitskugel. Indessen sind auch die Eigenschaften der beiden Kongruenzen selber nicht ohne Interesse, wie hier beiläufig erwähnt sein mag. Es zeigt sich nämlich, daß diese Kongruenzen Normalensysteme sind. Dabei erinnern wir an die bekannte Invarianz dieser Eigenschaft gegenüber Verbiegungen im Beltramischen Sinne. In der Tat sind die durch

(6) $$\mathfrak{x}_1 = x - \frac{u^2 - v^2}{2}\mathfrak{X}, \qquad \mathfrak{x}_2 = x - \frac{u^2 - v^2}{2}\overline{\mathfrak{X}}$$

---

[33]) Bianchi, Lezioni 2, Cap. XVII; ferner Annali di Mat. (3) 3 (1899).

dargestellten Flächen sowie deren Parallelflächen Orthogonalflächen der beiden Linienkongruenzen; denn es ist

$$d\mathfrak{x}_1 = dx - \frac{u^2-v^2}{2} d\mathfrak{X} - (u\,du - v\,dv)\mathfrak{X},$$

so daß sich mit Berücksichtigung von (5) $\Sigma \mathfrak{X} d\mathfrak{x}_1 = 0$ und auf analoge Weise $\Sigma \overline{\mathfrak{X}} d\mathfrak{x}_2 = 0$ ergibt. Wir erkennen ferner, daß die beiden Flächen $(\mathfrak{x}_1, \ldots)$ und $(\mathfrak{x}_2, \ldots)$ die Enveloppenschalen eines Systems von ∞^2 Kugeln darstellen, die mit den Radien $\left|\frac{u^2-v^2}{2}\right|$ um die Punkte der Biegungsfläche $(x, \ldots)$ geschlagen sind.

3. Es handelt sich nun vor allem um die Berechnung der Linienelemente der beiden Bildkugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$. Zur Vereinfachung sei

$$u x_u - v x_v = x_1, \quad X\sqrt{H} = x_2$$

gesetzt, so daß also

$$\mathfrak{X} = x_1 + x_2, \quad \overline{\mathfrak{X}} = x_1 - x_2 \tag{7}$$

wird.

Wir finden mit Benutzung von (2):

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{1-u^2}{H} x_u + \frac{uv}{H} x_v + (uL - vM)X, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= -\frac{uv}{H} x_u - \frac{1-v^2}{H} x_v + (uM - vN)X, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

während

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = \sqrt{H}\, X_u - \frac{u}{\sqrt{H}} X, \quad \frac{\partial x_2}{\partial v} = \sqrt{H}\, X_v - \frac{v}{\sqrt{H}} X \tag{9}$$

ist. Danach wird:

$$\begin{aligned} \sum dx_1^2 = \frac{1}{H} [(1-u^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1-v^2)dv^2] \\ + [u(L\,du + M\,dv) + v(M\,du + N\,dv)]^2, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum dx_2^2 = \frac{1}{H}(u\,du + v\,dv)^2 + H \sum dX^2. \tag{11}$$

Es gilt aber allgemein die Formel:

$$\begin{aligned} \sum dX^2 = \frac{1}{EG-F^2} [G(L\,du + M\,dv)^2 - 2F(L\,du + M\,dv)(M\,du + N\,dv) \\ + E(M\,du + N\,dv)^2], \end{aligned}$$

die im vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} H \sum dX^2 = (L\,du + M\,dv)^2 + (M\,du + N\,dv)^2 \\ - [u(L\,du + M\,dv) + v(M\,du + N\,dv)]^2 \end{aligned}$$

liefert. Wir setzen diesen Ausdruck in (11) ein und addieren (10):

$$\sum dx_1^2 + \sum dx_2^2 = \frac{1}{H}(du^2 + dv^2) + (L\,du + M\,dv)^2 + (M\,du + N\,dv)^2.$$

Schreibt man nach (4) $LN - M^2$ für $\frac{1}{H}$, so erhält man:

$$(12)\qquad \sum dx_1^2 + \sum dx_2^2 = (L+N)(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2).$$

Andererseits gewinnt man aus (8) und (9), wenn gleichzeitig beachtet wird, daß

$$\sum x_u X_u = -L, \qquad \sum x_u X_v = \sum x_v X_u = -M, \qquad \sum x_v X_v = -N$$

ist, die Relation:

$$(13)\qquad \sum dx_1\,dx_2 = -\frac{1}{\sqrt{H}}(L\,du^2 - N\,dv^2).$$

Aus (12) und (13) folgen mit Berücksichtigung von (7) die beiden Beziehungen:

$$(14)\quad \begin{cases} \sum d\mathfrak{X}^2 = (L+N)(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - \dfrac{2}{\sqrt{H}}(L\,du^2 - N\,dv^2) \\ \sum d\overline{\mathfrak{X}}^2 = (L+N)(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) + \dfrac{2}{\sqrt{H}}(L\,du^2 - N\,dv^2) \end{cases}$$

4. Die wichtigen Eigenschaften der beiden quadratischen Differentialformen (14), die wir jetzt herleiten wollen, hängen aufs engste mit der Tatsache zusammen, daß man auf den Biegungsflächen der Flächen 2. Grades die Asymptotenlinien und damit gleichzeitig das (bei der Abwicklung auf die Fläche 2. Grades) *permanente konjugierte System* mit Hilfe von Quadraturen bestimmen kann. Der Beweis dieses für die ganze Biegungstheorie der Flächen 2. Grades höchst bedeutungsvollen Satzes wird in der von Bianchi im 3. Bande seiner Lezioni[34]) gegebenen zusammenhängenden Darstellung in der Weise geführt, daß für die quadratische Differentialform, deren Verschwinden das permanente konjugierte System definiert, ein Faktor angegeben wird, der sie in eine Differentialform vom Krümmungsmaße Null, d. h. in das Produkt zweier Differentiale verwandelt. Wir sind genötigt, die Zerspaltung dieses Produkts durchzuführen, da es für unsere Zwecke auf die Differentiale selber ankommt. Bemerkt sei übrigens, daß die nachfolgende Bestimmung der beiden erforderlichen integrierenden Faktoren über den uns beschäftigenden Spezialfall hinaus leicht auf die Biegungsflächen der allgemeinsten Flächen 2. Grades ausgedehnt werden kann[35]).

[34]) § 85 auf S. 259.

[35]) S. auch Jonas, Über eine neue partielle Differentialgleichung des Deformationsproblems und über die Bestimmung der Asymptotenlinien auf den Biegungsflächen der Flächen zweiten Grades. Berl. Math. Ges. Ber. **18** (1914), S. 52.

Es sei zwecks übersichtlicher Gestaltung der Rechnung für einen Augenblick gesetzt:

$$L = l\sqrt{H}, \qquad M = \frac{m}{\sqrt{H}}, \qquad N = n\sqrt{H}.$$

Dadurch erhalten die Gleichungen (3) und (4) von Codazzi und Gauß die einfachere Gestalt:

$$m_u = H\,l_v, \qquad m_v = H\,n_u, \qquad m^2 + 1 = H^2\,l\,n.$$

Man bestätigt nun unschwer, daß die beiden folgenden Ausdrücke exakte Differentiale sind:

$$(15)\qquad \begin{cases} \sqrt{2}\,d\alpha = \sqrt{\sqrt{m^2+1}+m}\,(\sqrt{l}\,du + \sqrt{n}\,dv), \\ \sqrt{2}\,d\beta = \sqrt{\sqrt{m^2+1}-m}\,(\sqrt{l}\,du - \sqrt{n}\,dv). \end{cases}$$

In der Tat wird — wir beschränken uns auf den ersten Ausdruck —:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\sqrt{m^2+1}+m}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\sqrt{m^2+1}+m}\,\sqrt{l}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\sqrt{m^2+1}+m}\,\sqrt{n}\right)\right] \\ &\quad = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{m^2+1}}\,m_v + \frac{l_v}{\sqrt{l}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m^2+1}}\,m_u - \frac{n_u}{\sqrt{n}} \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{m_v}{H} - n_u\right) - \frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{m_u}{H} - l_v\right) = 0. \end{aligned}$$

Wir ziehen es vor, die Formeln (15) in der folgenden Schreibweise weiter zu benutzen:

$$(16)\qquad \begin{cases} \sqrt{2}\,d\alpha = \sqrt{\sqrt{LN}+M}\,(\sqrt{L}\,du + \sqrt{N}\,dv), \\ \sqrt{2}\,d\beta = \sqrt{\sqrt{LN}-M}\,(\sqrt{L}\,du - \sqrt{N}\,dv). \end{cases}$$

5. Wir bilden mit Hilfe dieser beiden Formeln:

$$(17)\qquad \begin{cases} 2\,d\alpha\,d\beta = \dfrac{1}{\sqrt{H}}\,(L\,du^2 - N\,dv^2), \\ d\alpha^2 + d\beta^2 = \sqrt{LN}\,(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv). \end{cases}$$

Mithin sind α und β die Parameter des permanenten konjugierten Systems, während die Asymptotenlinien der Biegungsfläche $\alpha \pm i\beta = \text{konst.}$ dargestellt werden[36]).

Den beiden quadratischen Differentialformen (14) können wir jetzt mittels (17), wenn außerdem noch

$$(18)\qquad \sqrt[4]{\frac{N}{L}} = e^{\theta}$$

---

[36]) Man beachte also, daß α und β im vorliegenden Kapitel eine andere Bedeutung haben als in den beiden voraufgehenden.

gesetzt wird, die folgende Gestalt geben:

$$(19)\qquad \begin{cases} \sum d\mathfrak{X}^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) - 4\,d\alpha\,d\beta, \\ \sum d\overline{\mathfrak{X}}^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) + 4\,d\alpha\,d\beta. \end{cases}$$

Auf Grund dieser Formeln gelangen wir zu dem Ergebnis, daß $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ die Bildkugeln eines Hazzidakisschen Paares von Flächen von konstanter Krümmung $+1$ darstellen. Ein solches liegt, wie bereits am Schluß von § 7 festgestellt wurde, vor, wenn zwei Flächen mit der konstanten Krümmung $+1$ punktweise derart einander zugeordnet sind, daß bei Abwicklung der einen Fläche auf die Bildkugel der anderen (und umgekehrt) korrespondierende Punkte zur Deckung kommen. Wir bemerken zunächst, daß die Tatsache, daß jede der beiden Differentialformen (19) das Krümmungsmaß 1 besitzt, durch das Bestehen der Differentialgleichung

$$\theta_{\alpha\alpha} + \theta_{\beta\beta} + e^{2\theta} - e^{-2\theta} = 0$$

zum Ausdruck gelangt. Um nun erkennen zu lassen, daß durch (19) gleichzeitig zwei Biegungsflächen der Kugel im Raume ihrer Gestalt nach definiert werden, führen wir neue Parameter α' und β' mittels der Substitution

$$(20)\qquad \alpha = \frac{\alpha' + \beta'}{2\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{\alpha' - \beta'}{2\sqrt{2}}$$

ein. Dadurch wird

$$\sum d\mathfrak{X}^2 = sh^2\theta\,d\alpha'^2 + ch^2\theta\,d\beta'^2, \qquad \sum d\overline{\mathfrak{X}}^2 = ch^2\theta\,d\alpha'^2 + sh^2\theta\,d\beta'^2.$$

Die rechten Seiten dieser beiden Formeln[37]) sind aber die bekannten Ausdrücke für die Quadrate der Linienelemente zweier durch die Hazzidakissche Transformation verbundener Biegungsflächen der Kugel, bezogen auf die Parameter der Krümmungslinien. Für die erste dieser beiden Flächen stellt gleichzeitig der zweite Ausdruck das Quadrat des Linienelements der sphärischen Abbildungen dar und umgekehrt. Die Bestimmung der beiden Flächen von konstanter positiver Krümmung erfordert, da wir hier $\mathfrak{X}, \ldots, \overline{\mathfrak{X}}, \ldots$ als bekannt angesehen haben, nur Quadraturen. Die betreffenden Formeln werden wir unter Zugrundelegung der Parameter α und β im nächsten Paragraphen angeben. Es kommt aber, wie wir bereits bemerkt haben, nicht auf die Flächen selber, sondern nur auf ihre Bildkugeln an.

Man weiß, daß allgemein das mit dem Krümmungsmaße multiplizierte Quadrat des Linienelements einer Fläche, vermehrt um das Quadrat des Linienelements der Bildkugel bis auf einen Faktor (die mittlere Krüm-

---

[37]) Bianchi, Lezioni di geom. diff. 2 (1903), § 392.

mung) die zweite quadratische Differentialform der Fläche ergibt. Daraus geht hervor, daß man, um die Asymptotenlinien für die Flächen des Hazzidakisschen Paares zu bestimmen, nur die Summe der beiden Ausdrücke (19) gleich Null zu setzen hat. Auf diese Weise ersieht man sofort, daß diese Asymptotenlinien durch $\alpha \pm i\beta =$ konst. dargestellt werden und demnach den Asymptotenlinien auf der Biegungsfläche des Paraboloids $z = ixy$ entsprechen. Daraus folgt dann aber die Korrespondenz sämtlicher konjugierter Systeme.

Wir sprechen unser Ergebnis in Gestalt des folgenden Theorems aus: *Verbindet man mit jedem Punkte einer Biegungsfläche vom Typus*

$$ds^2 = (1 - v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1 - u^2)dv^2$$

zwei Strahlen, die in der durch die Normale und die Tangente der Kurve $uv =$ konst. *bestimmten Ebene liegen und mit dieser Tangente zu beiden Seiten den Winkel* $\omega = \arccos\sqrt{u^2 + v^2}$ *einschließen, so stellen stets die Bildkugeln der von den Strahlen gebildeten beiden Linienkongruenzen gleichzeitig die Bildkugeln eines Hazzidakisschen Paares von Flächen von konstanter positiver Krümmung dar. Dabei besteht Korrespondenz zwischen den konjugierten Systemen dieser beiden Flächen und denjenigen der Biegungsfläche.*

§ 9.

Konstruktion der Biegungsfläche des Paraboloids $z = ixy$ aus einem als bekannt vorausgesetzten Hazzidakisschen Paare.

1. Indem wir uns auf den soeben bewiesenen Satz stützen, gelingt es uns leicht, auf Grund eines als bekannt vorausgesetzten Hazzidakisschen Paares von Flächen von konstanter positiver Krümmung, genauer: auf Grund der beiden zu einem solchen Paare gehörigen Bildkugeln eine Biegungsfläche vom Typus

$$(1) \qquad ds^2 = (1 - v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1 - u^2)dv^2$$

zu konstruieren.

Aus den Formeln (5) von § 8 folgt nämlich, wenn wir die sphärischen Bilder $\mathfrak{X}, \ldots$ und $\overline{\mathfrak{X}}, \ldots$ eines Hazzidakisschen Paares, ausgedrückt mittels irgend zweier, die erforderliche Zuordnung der Punkte leistender Variablen, als gegeben voraussetzen:

$$(2) \qquad X = \frac{1}{2\sqrt{H}}(\mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X}}), \qquad u x_u - v x_v = \frac{1}{2}(\mathfrak{X} + \overline{\mathfrak{X}}),$$

hieraus weiter:

$$(3) \quad H = 1 - u^2 - v^2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum \mathfrak{X}\overline{\mathfrak{X}}\Big), \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{2}\Big(1 + \sum \mathfrak{X}\overline{\mathfrak{X}}\Big),$$

also:

$$X = \frac{\mathfrak{X} - \bar{\mathfrak{X}}}{\sqrt{2(1 - \Sigma \mathfrak{X} \bar{\mathfrak{X}})}}. \tag{4}$$

Um nun mittels $\mathfrak{X}, \ldots, \bar{\mathfrak{X}}, \ldots$ die laufenden Koordinaten $x, \ldots$ der Biegungsfläche zu bestimmen, bilden wir auf Grund der Formeln § 8 (5) zunächst die Ausdrücke $\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{Z}} - \mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{Y}}, \ldots$ und finden nach einigen Reduktionen

$$v x_u + u x_v = \frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{Z}} - \mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{Y}}). \tag{5}$$

Aus dieser Relation und der zweiten Formel (2) gewinnt man die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} x_u &= \frac{1}{2(u^2+v^2)}[(\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{Z}} - \mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{Y}})v + (\mathfrak{X} + \bar{\mathfrak{X}})u], \\ x_v &= \frac{1}{2(u^2+v^2)}[(\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{Z}} - \mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{Y}})u - (\mathfrak{X} + \bar{\mathfrak{X}})v]. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Es handelt sich nun darum, neben (3) eine zweite Relation für u und v aufzufinden. Zu diesem Zwecke bilden wir in der zweiten Formel (2) auf beiden Seiten die Differentiale, wobei wir die Ausdrücke § 8 (2) für x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} benutzen, und erhalten:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1-u^2}{H} x_u + \frac{uv}{H} x_v + (Lu - Mv)X\right] du \\ &- \left[\frac{uv}{H} x_u + \frac{1-v^2}{H} x_v + (Nv - Mu)X\right] dv = \frac{1}{2}(d\mathfrak{X} + d\bar{\mathfrak{X}}). \end{aligned}$$

Multipliziert man diese und die beiden analogen Gleichungen gliedweise mit denen der Gruppe (5), so ergibt die nachfolgende Addition:

$$v\,du - u\,dv = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} d\mathfrak{X} + d\bar{\mathfrak{X}}, & \mathfrak{X}, & \bar{\mathfrak{X}} \\ d\mathfrak{Y} + d\bar{\mathfrak{Y}}, & \mathfrak{Y}, & \bar{\mathfrak{Y}} \\ d\mathfrak{Z} + d\bar{\mathfrak{Z}}, & \mathfrak{Z}, & \bar{\mathfrak{Z}} \end{vmatrix}.$$

Nach Division durch $u^2 + v^2$ bzw. durch den der Relation (3) entnommenen Wert kann man zum Integral übergehen.

Zur Bestimmung der Größen u und v hat man demnach das folgende Formelpaar:

$$\left\{\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \sum \mathfrak{X}\bar{\mathfrak{X}}\right), \\ \operatorname{arctg}\frac{u}{v} &= \int \frac{1}{2(1 + \Sigma \mathfrak{X}\bar{\mathfrak{X}})} \begin{vmatrix} d\mathfrak{X} + d\bar{\mathfrak{X}}, & \mathfrak{X}, & \bar{\mathfrak{X}} \\ d\mathfrak{Y} + d\bar{\mathfrak{Y}}, & \mathfrak{Y}, & \bar{\mathfrak{Y}} \\ d\mathfrak{Z} + d\bar{\mathfrak{Z}}, & \mathfrak{Z}, & \bar{\mathfrak{Z}} \end{vmatrix} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

und für die Koordinaten x, y, z der Biegungsfläche nach (6):

$$x = \int \frac{1}{2(u^2+v^2)}\left[(\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{Z}} - \mathfrak{Z}\bar{\mathfrak{Y}})\,d(uv) + (\mathfrak{X} + \bar{\mathfrak{X}})\,d\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right)\right]. \tag{8}$$

Wir behaupten also:

Die Formeln (7) *und* (8) *liefern die Konstruktion der Biegungsflächen vom Typus* (1):

$$ds^2 = (1 - v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1 - u^2)dv^2$$

aus je einem als bekannt vorausgesetzten Paar von Bildkugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ *und* $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ *zweier durch die Hazzidakissche Transformation verbundener Flächen von konstanter positiver Krümmung.*

Der noch zu führende Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung bezieht sich auf zwei Punkte: einmal muß gezeigt werden, daß *in* (7) *und* (8) *unter den Integralzeichen exakte Differentiale stehen*, außerdem aber, daß *die durch* (8) *definierte Fläche tatsächlich als Quadrat des Linienelements den Ausdruck* (1) *zuläßt*. Der *zweite* Punkt möge, da er keine Schwierigkeiten bietet, vorweg erledigt werden. Wir nehmen also für einen Augenblick an, das Bestehen der Formelgruppe (8) für x, y, z sei bereits erwiesen. Dann wird:

$$\sum dx^2 = \frac{1}{4(u^2+v^2)^2}\left\{\left[1 - \left(\sum \mathfrak{X}\overline{\mathfrak{X}}\right)^2\right][d(uv)]^2 + 2\left(1 + \sum \mathfrak{X}\overline{\mathfrak{X}}\right)\left[d\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right)\right]^2\right\}.$$

Dieser Ausdruck geht mit Benutzung von (7) aber sofort in (1) über.

Die Erledigung des *ersten* Punktes, nämlich der Nachweis, daß für die Integrale (7) und (8) die Integrabilitätsbedingungen gerade dann erfüllt sind, wenn $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ die Bildkugeln eines Hazzidakisschen Paares sind, erfordert umfangreichere Entwicklungen, die aber gleichzeitig zu weiteren, in analytischer und in geometrischer Hinsicht interessanten Ergebnissen führen.

2. Es sei zunächst bemerkt, daß wir die beiden als gegeben anzusehenden Bildkugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ des Hazzidakisschen Paares von Flächen von konstanter positiver Krümmung zweckmäßig nicht auf die Parameter der Krümmungslinien beziehen, was an sich das Nächstliegende scheint, sondern auf die mit diesen durch die lineare Substitution § 8 (20) verbundenen Größen α und β, denen auf der gesuchten Biegungsfläche des Paraboloids $z = ixy$ das permanente konjugierte System entsprechen soll. Es sei also in Übereinstimmung mit § 8 (19):

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum d\mathfrak{X}^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) - 4\,d\alpha\,d\beta, \\ \sum d\overline{\mathfrak{X}}^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) + 4\,d\alpha\,d\beta, \end{cases}$$

wobei θ Integral der Differentialgleichung:

$$(10) \qquad \theta_{\alpha\alpha} + \theta_{\beta\beta} + e^{2\theta} - e^{-2\theta} = 0$$

ist.

Sind die Variablen, mittels derer die beiden Kugeln dargestellt und punktweise einander zugeordnet sind, zunächst andere, so erhält man α und β durch Integration der Differentialgleichung

$$\sum d\bar{\mathfrak{X}}^2 - \sum d\mathfrak{X}^2 = 0. \tag{11}$$

Die Kurven (α, β) können wir demnach als das Netz der *korrespondierenden Linien gleicher Bogenlänge*, gleichviel ob auf den Bildkugeln oder auf den Flächen des Hazzidakisschen Paares, ansprechen. Sie lassen sich, da die linke Seite von (11) $8\,d\alpha\,d\beta$, also eine Differentialform von verschwindendem Krümmungsmaß ist, mittels Quadraturen bestimmen.

3. Wir schicken nun eine Betrachtung vorauf, durch die zunächst einmal der Anschluß an die Calapso-Bianchische Theorie für die Verbiegung der Paraboloide gewonnen werden soll. Es handelt sich dabei um die Aufstellung eines seiner Natur nach mit dem System (1) von § 4 zusammenfallenden Systems totaler Differentialgleichungen, dessen Integration die Bestimmung von u und v als Funktionen von α und β zum Endeffekt hat; dabei dient eine Lösung θ von (10) als Ausgangspunkt. Die Rolle, die dieses Gleichungssystem in der bislang bekannten Theorie gespielt hat, bestand darin, daß es die Biegungsfläche des Paraboloids *intrinsek*, d. h. lediglich durch die flächentheoretischen Fundamentalgrößen und ohne eine bestimmte Orientierung im Raume lieferte.

Es genügt also für den Augenblick, ein Integral θ von (10) als bekannt vorauszusetzen, während auf die Kenntnis von $\mathfrak{X}, \ldots, \bar{\mathfrak{X}}, \ldots$, deren Ermittlung dann noch die Integration zweier totaler Differentialgleichungen vom Riccatischen Typus erfordern würde, verzichtet wird. Wir lösen zwecks Bestimmung von u und v die Gleichungen (16) von § 8 nach du und dv auf und erhalten, wenn die Beziehung

$$\sqrt[4]{\frac{N}{L}} = e^{\theta} \tag{12}$$

beachtet und

$$\sqrt{\frac{H}{2}\left(1 - \frac{M}{\sqrt{LN}}\right)} = \lambda, \qquad \sqrt{\frac{H}{2}\left(1 + \frac{M}{\sqrt{LN}}\right)} = \mu \tag{13}$$

gesetzt wird:

$$du = e^{\theta}(\lambda\, d\alpha + \mu\, d\beta), \qquad dv = e^{-\theta}(\lambda\, d\alpha - \mu\, d\beta). \tag{14}$$

Nun folgt einerseits aus (13) mit Benutzung der Relation

$$H = 1 - u^2 - v^2 = \frac{1}{LN - M^2} \tag{15}$$

die Gleichung:

$$u^2 + v^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 1; \tag{16}$$

andrerseits erhält man, indem man für (14) die Integrabilitätsbedingungen aufstellt:

(17) $$\lambda_\beta = \theta_\alpha \mu, \quad \mu_\alpha = \theta_\beta \lambda.$$

Die noch fehlenden Ausdrücke für λ_α und μ_β ergeben sich, wenn man die partiellen Ableitungen von (16) bildet und mit Hilfe von (14) und (17) reduziert.

Wir gewinnen auf diese Weise das folgende System totaler, linearer und homogener Differentialgleichungen für die vier gesuchten Funktionen u, v, λ, μ:

(18) $$\begin{cases} u_\alpha = e^\theta \lambda, \quad u_\beta = e^\theta \mu, \quad v_\alpha = e^{-\theta}\lambda, \quad v_\beta = -e^{-\theta}\mu, \\ \lambda_\alpha = -\mu\theta_\beta - u e^\theta - v e^{-\theta}, \quad \lambda_\beta = \theta_\alpha \mu, \\ \mu_\alpha = \theta_\beta \lambda, \quad \mu_\beta = -\lambda\theta_\alpha - u e^\theta + v e^{-\theta}; \end{cases}$$

dazu kommt, mit der Bedeutung einer Anfangsbedingung, die quadratische Relation (16)

$$u^2 + v^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 1,$$

durch die der infolge der Differentialgleichungen (18) *konstante* Wert des auf der linken Seite stehenden Ausdrucks festgesetzt wird.

Daß nun ein Lösungssystem u, v, λ, μ, zu dem man auf Grund eines bekannten Integrals θ von (10) gelangt ist, tatsächlich hinreicht, um eine Biegungsfläche vom Typus (1) durch ihre flächentheoretischen Fundamentalgrößen zu definieren, bestätigt man am einfachsten, indem man sich die Formeln von § 8 wieder herstellt, d. h. die durch (12) und (13) bestimmten und demnach die Relation (15) befriedigenden Größen L, M, N einführt, die Relationen (14) in § 8 (16) verwandelt und zum Ausdruck bringt, daß in den letztgenannten Formeln die rechten Seiten exakte Differentiale darstellen; damit erhält man aber die Codazzischen Gleichungen für L, M, N, auf die es allein noch ankam.

Abgesehen von der Beschränkung auf das spezielle Paraboloid $z = ixy$ erweist sich das Gleichungssystem (16), (18) als identisch mit demjenigen, das im Mittelpunkt der Calapso-Bianchischen Theorie steht. Die hier gegebene Herleitung ist übrigens insofern neu, als nicht von den Christoffelschen Äquivalenzformeln[38]), sondern von dem Umstande Gebrauch gemacht wurde, daß man in der Lage ist, die integrierenden Faktoren (s. § 8, 4.) für die Differentialgleichungen des permanenten konjugierten Systems (oder, wenn man will, der Asymptotenlinien) anzugeben.

Man wird hier die Frage aufwerfen, welche prinzipielle Änderung der bisherigen Biegungstheorie der Paraboloide uns eigentlich gestattet, ihr den

[38]) Bianchi, Lezioni di geom. diff. 2 (1909), S. 250.

rein analytischen Charakter zu nehmen und sie in eine geometrische Theorie umzuwandeln. Die Antwort liegt in dem Hinweis auf die Deutung der Parameter α und β, die von der früheren Auffassung abweicht. In der Tat können die Variablen α und β — und das erscheint als das Nächstliegende, solange man nur die Lösung θ von (10) ins Auge faßt — als Parameter der Krümmungslinien auf der durch θ intrinsek definierten Fläche von konstanter positiver Krümmung angesprochen werden, der dann das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = 4(ch^2\theta\,d\alpha^2 + sh^2\theta\,d\beta^2) \quad \text{oder} \quad ds^2 = 4(sh^2\theta\,d\alpha^2 + ch^2\theta\,d\beta^2)$$

zukäme. Das ist der Standpunkt der ursprünglichen Theorie, die eben aus dem Grunde eine rein analytische bleiben mußte, weil der Übergang zu den beiden, wie aus unseren Entwicklungen hervorgeht, in Wirklichkeit allein in Frage kommenden Flächen von konstanter Krümmung mit den durch die Formeln

$$\text{(19)} \qquad \begin{cases} ds_0^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) + 4\,d\alpha\,d\beta, \\ d\bar{s}_0^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) - 4\,d\alpha\,d\beta \end{cases}$$

gegebenen Linienelementen eine Lie-Bonnetsche Transformation bedeutet, die bekanntlich keiner geometrischen Interpretation fähig ist und die transformierten Flächen nicht in einer bestimmten räumlichen Orientierung liefert[39]).

Wir wollen nun zeigen, daß wir auf Grund unserer neuen Auffassung des Sachverhalts imstande sind, von den als gegeben vorausgesetzten Bildkugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\bar{\mathfrak{X}}, \ldots)$ ausgehend, das allgemeine Integral des Systems (16), (18) unmittelbar und zwar ohne jedes Integralzeichen niederzuschreiben; dabei wird dann also auch die durch die zweite Formel (7) verlangte Quadratur durch einen endlichen Ausdruck ersetzt. Der noch zu erledigende Teil der Rechnung, der die vorliegende Untersuchung zum Abschluß bringt und auch die Verifikation der Integrabilitätsbedingungen für (8) umfaßt, stützt sich ganz wesentlich auf eine bemerkenswerte und, wie beiläufig bemerkt sei, einer weitgehenden Verallgemeinerung fähige geometrische Deutung der vier Funktionen u, v, λ, μ.

4. Wir verbinden mit den Punkten der Kugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\bar{\mathfrak{X}}, \ldots)$, die, wie vorausgesetzt wird, die durch (9) gegebenen Linienelemente zu-

---

[39]) Ohne hier auf die Theorie der *quadriche coniugate in deformazione* (Bianchi, Lezioni 3, Cap. V) näher einzugehen, stellen wir fest, daß die Bianchische Transformation H in dem besonderen Falle, wo sie zwischen den Biegungsflächen der sog. Darbouxschen Flächen 2. Grades und den Biegungsflächen der Paraboloide vermittelt, sich auf die Liesche Transformation der zugehörigen Flächen von konstanter Krümmung zurückführen läßt.

lassen, je ein begleitendes rechtwinkliges Dreikant Δ und $\bar{\Delta}$. Die Tangentenrichtungen $(\mathfrak{X}^{(1)}, \ldots)$, $(\mathfrak{X}^{(2)}, \ldots)$ bzw. $(\bar{\mathfrak{X}}^{(1)}, \ldots)$, $(\bar{\mathfrak{X}}^{(2)}, \ldots)$ wollen wir dadurch definieren, daß wir auf beiden Kugeln das von den Halbierungsgeraden der Koordinatenwinkel gebildete rechtwinklige Achsenkreuz in der Tangentialebene um 45^0 drehen. Es gelten dann die beiden folgenden Gruppen von Differentialrelationen:

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_\alpha = e^{-\theta}\mathfrak{X}^{(1)} + e^{\theta}\mathfrak{X}^{(2)}, & \mathfrak{X}_\beta = -e^{\theta}\mathfrak{X}^{(1)} - e^{-\theta}\mathfrak{X}^{(2)}, \\ \mathfrak{X}_\alpha^{(1)} = -\theta_\beta \mathfrak{X}^{(2)} - e^{-\theta}\mathfrak{X}, & \mathfrak{X}_\beta^{(1)} = \theta_\alpha \mathfrak{X}^{(2)} + e^{\theta}\mathfrak{X}, \\ \mathfrak{X}_\alpha^{(2)} = \theta_\beta \mathfrak{X}^{(1)} - e^{\theta}\mathfrak{X}, & \mathfrak{X}_\beta^{(2)} = -\theta_\alpha \mathfrak{X}^{(1)} + e^{-\theta}\mathfrak{X}, \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{X}}_\alpha = e^{-\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(1)} - e^{\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(2)}, & \bar{\mathfrak{X}}_\beta = e^{\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(1)} - e^{-\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(2)}, \\ \bar{\mathfrak{X}}_\alpha^{(1)} = -\theta_\beta \bar{\mathfrak{X}}^{(2)} - e^{-\theta}\bar{\mathfrak{X}}, & \bar{\mathfrak{X}}_\beta^{(1)} = \theta_\alpha \bar{\mathfrak{X}}^{(2)} - e^{\theta}\bar{\mathfrak{X}}, \\ \bar{\mathfrak{X}}_\alpha^{(2)} = \theta_\beta \bar{\mathfrak{X}}^{(1)} + e^{\theta}\bar{\mathfrak{X}}, & \bar{\mathfrak{X}}_\beta^{(2)} = -\theta_\alpha \bar{\mathfrak{X}}^{(1)} + e^{-\theta}\bar{\mathfrak{X}}. \end{cases}$$

Erwähnt seien, wenn auch ohne Belang für das Folgende, die Formeln für die laufenden Koordinaten der beiden zu den Bildkugeln gehörigen Flächen von konstanter Krümmung $+1$, die das Hazzidakissche Paar bilden:

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}_0 = \int[(e^{-\theta}\mathfrak{X}^{(1)} - e^{\theta}\mathfrak{X}^{(2)})d\alpha + (e^{\theta}\mathfrak{X}^{(1)} - e^{-\theta}\mathfrak{X}^{(2)})d\beta], \\ \bar{\mathfrak{x}}_0 = \int[(e^{-\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(1)} + e^{\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(2)})d\alpha - (e^{\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(1)} + e^{-\theta}\bar{\mathfrak{X}}^{(2)})d\beta]. \end{cases}$$

Mittels (20) und (21) bestätigt man, daß unter den Integralzeichen exakte Differentiale stehen. Ferner überzeugt man sich leicht davon, daß zwischen jeder der beiden Flächen und der Bildkugel der anderen die behauptete Isometrie besteht:

$$\sum d\mathfrak{x}_0^2 = \sum d\bar{\mathfrak{X}}^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) + 4\,d\alpha\,d\beta,$$

$$\sum d\bar{\mathfrak{x}}_0^2 = \sum d\mathfrak{X}^2 = (e^{2\theta} + e^{-2\theta})(d\alpha^2 + d\beta^2) - 4\,d\alpha\,d\beta.$$

5. Wir beweisen nun den folgenden Satz, aus dem hervorgeht, daß den Größen u, v, λ, μ bereits in bezug auf das Bildkugelpaar $(\mathfrak{X}, \ldots)$, $(\bar{\mathfrak{X}}, \ldots)$ ganz unabhängig vom Biegungsproblem für das Paraboloid $z = ixy$ eine beachtenswerte geometrische Bedeutung zukommt:

Die vier durch die Relation $u^2 + v^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 1$ verbundenen Integralfunktionen des Systems (18) *sind identisch mit den Eulerschen Parametern derjenigen Drehung, durch die das Dreikant Δ in die Stellung von $\bar{\Delta}$ gebracht wird.*

Zum Beweise gehen wir von der zwischen Δ und $\bar{\Delta}$ vermittelnden orthogonalen Substitution (mit der Determinante $+1$) aus, die wir in Gestalt des folgenden Täfelchens schreiben:

$$
(23)\quad \left\{\begin{array}{c|c|c|c}
 & \mathfrak{x} & \mathfrak{x}^{(1)} & \mathfrak{x}^{(2)} \\
\hline
\bar{\mathfrak{x}} & u^2+v^2-\lambda^2-\mu^2 & 2(v\lambda-u\mu) & 2(v\mu+u\lambda) \\
\hline
\bar{\mathfrak{x}}^{(1)} & 2(v\lambda+u\mu) & u^2+\lambda^2-v^2-\mu^2 & 2(\lambda\mu-uv) \\
\hline
\bar{\mathfrak{x}}^{(2)} & 2(v\mu-u\lambda) & 2(\lambda\mu+uv) & u^2+\mu^2-v^2-\lambda^2, \\
\multicolumn{4}{c}{u^2+v^2+\lambda^2+\mu^2=1.}
\end{array}\right.
$$

Die Größen u, v, λ, μ wären also im einzelnen *definiert* durch die Formeln:

$$
(24)\qquad \begin{cases} 4u^2 = 1+\sum\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}+\sum\mathfrak{x}^{(1)}\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}+\sum\mathfrak{x}^{(2)}\bar{\mathfrak{x}}^{(2)}, \\ 4v^2 = 1+\sum\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}-\sum\mathfrak{x}^{(1)}\bar{\mathfrak{x}}^{(1)}-\sum\mathfrak{x}^{(2)}\bar{\mathfrak{x}}^{(2)} \quad \text{usw.} \end{cases}
$$

Dazu kommen Formeln für die Produkte aus je zweien der Größen:

$$4uv = \sum\mathfrak{x}^{(1)}\bar{\mathfrak{x}}^{(2)}-\sum\mathfrak{x}^{(2)}\bar{\mathfrak{x}}^{(1)} \quad \text{usw.}$$

Sie lassen erkennen, daß, wenn über das Vorzeichen bei einer der Größen verfügt wird, die der drei übrigen mitbestimmt sind.

Es handelt sich nun darum, zu zeigen, daß u, v, λ, μ das System der Differentialgleichungen (18) erfüllen. Wir differentiieren mit Benutzung der Formeln (20) und (21) die erste der Relationen (24) nach α und finden zunächst:

$$4uu_\alpha = e^\theta\left(\sum\mathfrak{x}^{(2)}\bar{\mathfrak{x}}-\sum\mathfrak{x}\bar{\mathfrak{x}}^{(2)}\right).$$

Dem Täfelchen (23) zufolge kann man hierfür schreiben:

$$u_\alpha = e^\theta\lambda.$$

In ganz analoger Weise ergibt sich:

$$u_\beta = e^\theta\mu,\qquad v_\alpha = e^{-\theta}\lambda,\qquad v_\beta = -e^{-\theta}\mu.$$

Die vier letzten Formeln genügen im Verein mit der quadratischen Relation dazu, ganz wie am Schluß von Nr. 3 das Bestehen des Systems (18) nachzuweisen.

Wird nun eine der beiden Kugeln, z. B. $(\bar{\mathfrak{x}}, \ldots)$, der G_3 ihrer Drehungen im Raume unterworfen, so treten *drei* willkürliche Konstanten in die für $u, v, \ldots$ gefundenen Ausdrücke (24) ein. Danach liegt also das allgemeine Integral des Systems (16), (18) vor; denn dieses weist drei willkürliche Konstanten auf, nämlich die Werte, die man für ein anfängliches Wertepaar α_0, β_0 der Variablen dreien der durch die Relation $u^2+v^2+\lambda^2+\mu^2=1$ verbundenen vier Größen beilegt.

6. Wir beachten, daß die erste Relation (7)

$$u^2+v^2=\frac{1}{2}\left(1+\sum \mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}}\right)$$

jetzt eine unmittelbare Folge von (23) ist. Was die zweite der Relationen (7) anbetrifft, so ist zu bedenken, daß sie, wo wir die endlichen Ausdrücke (24) für u und v bereits besitzen, nur noch eine Identität vorstellen kann. Deren tatsächliches Bestehen soll nun nachgewiesen werden. Damit erledigt sich die am Schluß von Nr. **1** in Aussicht gestellte Bestätigung dafür, daß in der fraglichen Formel unter dem Integralzeichen ein exaktes Differential steht.

Es sei also:

$$J=\int\frac{1}{2\,(1+\Sigma\,\mathfrak{x}\overline{\mathfrak{x}})}\begin{vmatrix} d\mathfrak{X}+d\overline{\mathfrak{X}}, & \mathfrak{X}, & \overline{\mathfrak{X}} \\ d\mathfrak{Y}+d\overline{\mathfrak{Y}}, & \mathfrak{Y}, & \overline{\mathfrak{Y}} \\ d\mathfrak{Z}+d\overline{\mathfrak{Z}}, & \mathfrak{Z}, & \overline{\mathfrak{Z}} \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Wir schreiben dafür:

$$J=\int\frac{1}{2(u^2+v^2)}\sum\left\{\frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}}-\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})\,d\mathfrak{X}+\frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}}-\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})\,d\overline{\mathfrak{X}}\right\}. \tag{26}$$

Für $\frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}}-\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})$ gewinnen wir zwei verschiedene Ausdrücke, je nachdem wir das Dreikant Δ oder $\overline{\Delta}$ bevorzugen. Um z. B. den ersten Ausdruck herzuleiten, bilden wir mittels des Täfelchens (23):

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}}-\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})=\begin{vmatrix} \mathfrak{Y}, & (v\lambda-u\mu)\,\mathfrak{Y}^{(1)}+(v\mu+u\lambda)\,\mathfrak{Y}^{(2)} \\ \mathfrak{Z}, & (v\lambda-u\mu)\,\mathfrak{Z}^{(1)}+(v\mu+u\lambda)\,\mathfrak{Z}^{(2)} \end{vmatrix}$$

und beachten, daß

$$\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}^{(1)}-\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}^{(1)}=\mathfrak{X}^{(2)},\qquad \mathfrak{Y}^{(2)}\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}^{(2)}\mathfrak{Y}=\mathfrak{X}^{(1)}$$

ist. Wir finden:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}}-\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})=-(v\mu+u\lambda)\,\mathfrak{X}^{(1)}+(v\lambda-u\mu)\,\mathfrak{X}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; =(v\mu-u\lambda)\,\overline{\mathfrak{X}}^{(1)}-(v\lambda+u\mu)\,\overline{\mathfrak{X}}^{(2)}. \end{cases} \tag{27}$$

Setzt man nun in (26) für $\frac{1}{2}(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}}-\mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})$ an erster Stelle den ersten, an zweiter Stelle den zweiten der Ausdrücke (27) ein und drückt außerdem $d\mathfrak{X}$ und $d\overline{\mathfrak{X}}$ mittels der Formeln (20) und (21) aus, so ergibt sich:

$$J=\int\frac{1}{u^2+v^2}\left[(ve^{\theta}-ue^{-\theta})\,\lambda\,d\alpha+(ve^{\theta}+ue^{-\theta})\,\mu\,d\beta\right]$$

und mit Benutzung von (18) tatsächlich:

$$J=\int\frac{v\,du-u\,dv}{u^2+v^2}=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}.$$

Bezüglich des Integrals (25) bemerken wir ohne nähere Ausführungen, daß der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck durchaus nicht etwa nur dann ein exaktes Differential wird, wenn $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ die Bildkugeln eines Hazzidakisschen Paares von Flächen von konstanter positiver Krümmung sind. Als Bedingung findet man vielmehr, daß die beiden Kugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ und $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ aufeinander *flächentreu* bezogen sein müssen, wie es im besonderen beim Hazzidakisschen Paare der Fall ist.

7. Es ist schließlich noch zu zeigen, daß für die Quadraturen (8), mittels derer die laufenden Koordinaten x, y, z der Biegungsfläche berechnet werden sollen, die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Zu diesem Zwecke formen wir den Ausdruck

$$dx = \frac{1}{2(u^2+v^2)}\left[(\mathfrak{Y}\overline{\mathfrak{Z}} - \mathfrak{Z}\overline{\mathfrak{Y}})\,d(uv) + (\mathfrak{X} + \overline{\mathfrak{X}})\,d\left(\frac{u^2-v^2}{2}\right)\right]$$

um, indem wir die eine der beiden Kugeln, z. B. $(\mathfrak{X}, \ldots)$ bevorzugen. Wir benutzen also die erste der beiden Formeln (27) und entnehmen (23) den Ausdruck für $\overline{\mathfrak{X}}$. Nach einigen Reduktionen ergibt sich:

$$(28) \qquad dx = (u\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{X}^{(1)} + \lambda\mathfrak{X}^{(2)})\,du - (v\mathfrak{X} + \lambda\mathfrak{X}^{(1)} + \mu\mathfrak{X}^{(2)})\,dv.$$

Es sei nun zur Abkürzung und in Anlehnung an § 5 (1) gesetzt:

$$(29) \qquad u\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{X}^{(1)} + \lambda\mathfrak{X}^{(2)} = \xi', \qquad -(v\mathfrak{X} + \lambda\mathfrak{X}^{(1)} + \mu\mathfrak{X}^{(2)}) = \xi,$$

so daß also

$$x_\alpha = \xi' u_\alpha + \xi v_\alpha, \qquad x_\beta = \xi' u_\beta + \xi v_\beta$$

wird.

Die zu bestätigende Integrabilitätsbedingung wäre die Relation:

$$\xi'_\beta u_\alpha + \xi_\beta v_\alpha = \xi'_\alpha u_\beta + \xi_\alpha v_\beta.$$

Wir zeigen leicht, daß einzeln

$$(30) \qquad \xi'_\beta u_\alpha + \xi_\beta v_\alpha = 0, \qquad \xi'_\alpha u_\beta + \xi_\alpha v_\beta = 0$$

wird. In der Tat finden wir durch Differentiation von (29) mit Benutzung der Systeme (18) und (20):

$$\xi'_\alpha = e^{-\theta}(\mu\mathfrak{X} + u\mathfrak{X}^{(1)} - v\mathfrak{X}^{(2)}), \qquad \xi_\alpha = e^{\theta}(\mu\mathfrak{X} + u\mathfrak{X}^{(1)} - v\mathfrak{X}^{(2)}),$$

$$\xi'_\beta = -e^{-\theta}(-\lambda\mathfrak{X} + v\mathfrak{X}^{(1)} + u\mathfrak{X}^{(2)}), \qquad \xi_\beta = e^{\theta}(-\lambda\mathfrak{X} + v\mathfrak{X}^{(1)} + u\mathfrak{X}^{(2)}),$$

so daß sich

$$e^{\theta}\xi'_\beta + e^{-\theta}\xi_\beta = 0, \qquad e^{\theta}\xi'_\alpha - e^{-\theta}\xi_\alpha = 0$$

und damit (30) ergibt[40]).

---

[40]) Unter Hinweis auf § 4, 4 stellen wir fest, daß ξ, η, ζ, u und ξ', η', ζ', v die laufenden Koordinaten zweier polarreziproker Minimalflächen des sphärisch-elliptischen Raumes sind. Es ist nämlich: (Fortsetzung der Fußnote 40 auf nächster Seite.)

Hiermit ist einerseits der Beweis des in Nr. 1 aufgestellten Theorems zum Abschluß gebracht. Andererseits können wir auf Grund der letzten Entwicklungen das Ergebnis in der folgenden neuen Form aussprechen:

Kennt man die Bildkugeln $(\mathfrak{X}, \ldots)$ *und* $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$ *eines Hazzidakisschen Paares von Flächen von konstanter positiver Krümmung, bezogen auf die in Nr. 2 definierten Parameter* α *und* β, *so hat man zwecks Bestimmung einer Biegungsfläche vom Typus*

$$\sum dx^2 = (1 - v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1 - u^2)dv^2$$

die Eulerschen Parameter u, v, λ, μ, *durch die sich die zwischen den begleitenden Dreikanten* $\varDelta$ *und* $\overline{\varDelta}$ *vermittelnde orthogonale Substitution darstellen läßt, nach* (23) *bzw.* (24) *zu berechnen und erhält dann* x, y, z *durch Quadratur*:

$$(31) \quad x = \int [(u\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{X}^{(1)} + \lambda\mathfrak{X}^{(2)})du - (v\mathfrak{X} + \lambda\mathfrak{X}^{(1)} + u\mathfrak{X}^{(2)})dv] \text{ usw.}$$

Wir können außerdem in engster Fühlungnahme mit der Calapso-Bianchischen Theorie den folgenden Zusatz formulieren:

Ist von den beiden Kugeln nur die eine, etwa $(\mathfrak{X}, \ldots)$ *gegeben, so ist die Integration des Systems* (16), (18) *als gleichwertig mit der Bestimmung der anderen Bildkugel anzusehen. Auch in diesem Falle gestattet die Kenntnis der Lösungen* u, v, λ, μ *des Systems, die Koordinaten* x, y, z *der Biegungsfläche nach* (28) *durch Quadratur zu finden.*

Es sei schließlich bemerkt, daß einem jeden Integral θ von (10) nicht eine einzelne Biegungsfläche des betrachteten Typus entspricht, sondern eine *dreiparametrige Untergruppe* innerhalb der allgemeinen Biegungsgruppe, die dadurch erzeugt wird, daß man die eine der beiden Kugeln, etwa $(\overline{\mathfrak{X}}, \ldots)$, ihren ∞^3 Drehungen im Raume unterwirft.

Berlin, im Oktober 1921.

$$\Sigma\xi^2 + u^2 = 1, \quad \Sigma\xi'^2 + v^2 = 1, \quad \Sigma\xi\xi' + uv = 0,$$
$$\Sigma d\xi^2 + du^2 = e^{2\theta}(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad \Sigma d\xi'^2 + dv^2 = e^{-2\theta}(d\alpha^2 + d\beta^2),$$
$$\Sigma d\xi\,d\xi' + du\,dv = d\alpha^2 - d\beta^2.$$

Dabei stellen die Kurven (α, β) die Krümmungslinien auf diesen Minimalflächen dar.

(Eingegangen am 13. 11. 1921.)

Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln.

Von

E. Study in Bonn.

(Fortsetzung*).)

Inhalt.

Erster Abschnitt (Schluß):

5. Charakteristische Zahlen von Kurven und Vereinen.

Es ist bekannt, daß in der projektiven Geometrie die gewöhnlich so genannten *Singularitäten* zweier zueinander korrelativer Kurven einander wechselweise bedingen. Einer (als Punktort) „singularitätenfreien" algebraischen Kurve von höherer als der zweiten Ordnung entspricht in einer korrelativen Transformation der ebenen Geometrie immer eine andere, deren Punktort gewisse Singularitäten (sogenannte notwendige Singularitäten) anhaften werden.

Ähnlich wie eine Korrelation verhält sich nun die Zuordnung zwischen den Örtern der Punkte x und ξ (S. 47). Man wird eine tiefere Einsicht in das Wesen der Beziehung zwischen einem *Verein* auf der Fläche 2. Ordnung und seinem Bilde, einer *Kurve* des Bildraumes, erhalten, wenn man untersucht, wie Besonderheiten der verschiedenen Stellen des Vereins und der Kurve einander bestimmen.

Es sei zunächst daran erinnert, daß wir als Stellen des Vereins oder der Kurve selbst die zuvor (S. 53) genannten, nur durch Grenzübergänge zu erhaltenden Elemente oder Punkte *nicht* betrachten. Folge hiervon

*) Der erste Teil ist in Math. Ann. 86, S. 40–77 erschienen.

ist, daß wir nur von solchen „Singularitäten" zu reden haben werden, die schon bei algebraischen und sogar schon bei rationalen Vereinen oder Kurven auftreten können.

Von den verschiedenartigen Stellen *algebraischer* Kurven handeln zahlreiche Abhandlungen. Es findet sich aber in dieser Literatur, besonders in der älteren, nicht weniges, das zu Bedenken Anlaß gibt. Erst in dem Werke von Hensel und Landsberg über die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen (Leipzig 1902, S. 460 ff.) habe ich eine exakte Bearbeitung des bezeichneten Stoffs gefunden.

Für die Zwecke der vorliegenden Untersuchung schien es mir gleichwohl nicht angezeigt, das dort Vorgetragene als bekannt vorauszusetzen. Einmal würde damit dem Leser eine Übersetzungsarbeit zugemutet werden, die ihm erspart werden kann; dann aber ist das, was hier gebraucht werden wird, dort nur teilweise und auch nicht auf die einfachste Art entwickelt, sondern im Zusammenhang mit anderen Überlegungen dargestellt, aus denen es erst herausgesucht werden müßte, solchen, die einen breiteren Unterbau nötig machen. Ich halte es also auch hier für richtig, ganz von vorn anzufangen. Da dabei überall nur die gewöhnlichsten Sätze über Potenzreihen benutzt werden, so konnten bei sachgemäßer Ordnung des Stoffs, die hoffentlich erreicht sein wird, die Beweise größtenteils unterdrückt werden. Ein mit der Theorie der analytischen Funktionen vertrauter Leser wird sie ohne Schwierigkeit ergänzen.

[1]. „Zu jeder Stelle einer jeden analytischen Kurve des projektiven Punktkontinuums $\{x_0 : x_1 : x_2 : x_3\}$ gehören unendlich viele analytische Funktionen des Ortes auf der Kurve, deren jede einzelne (t) den folgenden Forderungen genügt:

(a). Die Funktion t hat an der betrachteten Stelle den Wert Null.

(b). In einer gewissen Umgebung dieser Stelle (die nunmehr als Stelle $t = 0$ bezeichnet werden darf), lassen sich *die Werte* der Verhältnisgrößen (Koordinaten) $x_\varkappa$ so wählen, daß sie gewöhnliche Potenzreihen werden, die nach Potenzen von t fortschreiten. Es darf dabei noch angenommen werden, daß mindestens einer der Koordinatenwerte $x_\varkappa(0)$ von Null verschieden ist $\{x(0) \neq 0\}$, *wie es weiterhin auch stets vorausgesetzt werden soll.*

(c). In einer gewissen Umgebung derselben Stelle (die möglicherweise enger ist als die vorige) entspricht jedem Kurvenpunkt nur *ein* Parameterwert."

Hat eine analytische Funktion des Ortes auf der Kurve gleichzeitig die unter (a), (b), (c) genannten Eigenschaften, so nennen wir sie einen

zur betrachteten Stelle gehörigen oder ihr entsprechenden *uniformisierenden Parameter*[97]).

Ist t ein solcher Parameter, so ist jeder andere s in der Form

$$s = ct + \ldots \qquad \{c \neq 0\}$$

durch eine gewöhnliche Potenzreihe darstellbar.

Mit Hilfe eines uniformisierenden Parameters t können weitere Funktionen des Ortes auf der Kurve zunächst für eine Umgebung der Stelle $t = 0$ erklärt und dann analytisch fortgesetzt werden. Der allgemeinste Fall, den wir in dieser Hinsicht zu betrachten Anlaß haben, entspricht Funktionen der Form

$$s = \mathfrak{P}(t^{\frac{1}{m}}) \qquad \{|t| < r\},$$

wo $\mathfrak{P}$ irgendeine konvergente gewöhnliche Potenzreihe ist, und angenommen werden darf, daß sich die (positive ganze) Zahl m nicht durch einen Teiler von ihr ersetzen läßt.

In allen diesen Fällen wollen wir die Stelle $t = 0$ noch zum *Existenzbereich* der Funktion s rechnen. Wir sagen, sie sei ein $(m-1)$-facher *Verzweigungspunkt* der Funktion $s(t)$, oder sie gehöre zur *Verzweigungszahl* $m - 1$. Ist $m = 1$, so heißt die Funktion *an der Stelle* $t = 0$ *regulär*. Sie heißt dann auch *dort unverzweigt*.

Führt man die Funktion s (nebst ihrer Fortsetzung auf der Kurve) als Parameter ein, so wird damit jeder Punkt einer gewissen Umgebung der Stelle $t = 0$ m-mal dargestellt, die Kurve oder ein Stück von ihr wird in dieser Umgebung mit m *Blättern* überdeckt, die (im Falle $m > 1$) an der Stelle $t = 0$ im Zyklus miteinander zusammenhängen. Stellen der Art $(m > 1)$ sind im Existenzbereich einer analytischen Funktion des Ortes auf der Kurve höchstens in abzählbarer Menge vorhanden.

[2]. „Eine analytische Kurve $x(s)$ ist gerade (eine gerade Linie), wenn

$$(1) \qquad (x x' x'' z)_s = 0 \qquad \{s, z\}$$

ist; sie ist eben, wenn

$$(2) \qquad (x x' x'' x''')_s = 0 \qquad \{s\}$$

ist."

Hier bedeutet z. B. das Symbol $(x x' x'' z)$ die Determinante, die aus den nullten, ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten von

[97]) Nach einem berühmten Satze von H. Poincaré und Koebe gibt es Parameter, die die Kurve „im Ganzen", d. h. eine Umgebung *jeder* ihrer Stellen uniformisieren, abgesehen allein von den rationalen Kurven (bei denen irgendeine Stelle ausgeschlossen werden muß, die dem uneigentlichen Wert $t = \infty$ entspricht).

x und den Koordinaten eines willkürlichen Punktes z gebildet ist. Bei der Differentiation dient die im Zeichen $x(s)$ angedeutete Funktion des Ortes auf der Kurve als Parameter, und sie kann so weit verwendet werden, als sie sich auf der Kurve regulär verhält.

Man lese etwa die Formel (1) so: „$(x\,x'\,x''\,z)$ verschwindet für alle zulässigen s und für alle Punkte z". Was die Formel (2) bedeuten soll, dürfte hiernach bereits klar sein.

Wir betrachten weiterhin nur noch *unebene* Kurven, und nehmen dabei an, daß die Umgebungen der zu untersuchenden Stellen durch *uniformisierende* Parameter dargestellt sind.

[3]. „Zu jeder Stelle einer *unebenen* analytischen Kurve gehören drei ganze Zahlen a, b, c, denen folgende Eigenschaften zukommen:

(1). Es ist $$0 < a < b < c.$$

(2). Es ist an dieser Stelle

$$(x^{(0)}\,x^{(a)}\,x^{(b)}\,x^{(c)})_t \neq 0. \tag{3}$$

(3). Jede entsprechend, aber mit kleineren Zahlen als a, b, c gebildete Determinante hat den Wert Null."

Das soll heißen: Jede Determinante

$$(x^{(0)}\,x^{(a')}\,x^{(b')}\,x^{(c')})_t$$

hat den Wert Null, sobald

entweder $a' < a$,

oder $a' = a,\ b' < b$,

oder $a' = a,\ b' = b,\ c' < c$

ist. (Lexikographische Anordnnng der Zahlentripel. Jedes dem Tripel a, b, c vorhergehende Zahlentripel gehört zu einer Determinante vom Werte Null.)

Die Zahlen a, b, c sind dieselben für alle zueinander kollinearen Kurven, und für alle zu der betrachteten Stelle gehörigen uniformisierenden Parameter. Sie ändern sich auch nicht, wenn man die Koordinaten $x_\varkappa(t)$ mit einer bei $t = 0$ regulären Funktion multipliziert, die dort nicht verschwindet.

Benutzt man die hiernach vorhandene Willkür, so sieht man, daß bei geeigneter Parameterwahl in einer Umgebung der Stelle $t = 0$ die Kurve (nämlich ein Stück von ihr) sich in der folgenden besonderen Form darstellen läßt:

$$x_0 = 1,\quad x_1 = t^a,\quad x_2 = t^b + \ldots,\quad x_3 = t^c + \ldots. \tag{4}$$

Liegt umgekehrt eine Parameterdarstellung dieser Form vor, so ist t dann und nur dann ein zur Stelle $t=0$ gehöriger uniformisierender Parameter, wenn die Exponenten der in den Entwicklungen von x_1, x_2 und x_3 wirklich vorkommenden Glieder keinen gemeinsamen Teiler haben.

[4]. „Zu jeder Stelle der betrachteten Kurve gehört außer dem Kurvenpunkt $x(0)$ selbst oder also dem Punkte, dessen Gleichung ist

$$(u\,x)=0 \qquad \{t=0\},$$

eine diesen Punkt enthaltende Gerade $\widehat{x\,x^{(a)}}$ oder

$$(5) \qquad (x\,x^{(a)}y\,z)=0, \quad (v\,x)(w\,x^{(a)})-(w\,x)(v\,x^{(a)})=0 \qquad \{t=0\}$$

und eine diesen Punkt enthaltene Ebene $\widehat{x\,x^{(a)}x^{(b)}}$ oder

$$(6) \qquad (x\,x^{(a)}x^{(b)}z)=0 \qquad \{t=0\}“.\,^{28})$$

Die Gerade, deren *Gleichung* (als Ort ihrer Sekanten $\widehat{y\,z}$ oder $\widehat{v\,w}$) man in (5) vor sich hat, heißt *Tangente*, unter Umständen zweckmäßiger auch einfach *Gerade der Kurve* an der Stelle $t=0$; ebenso die Ebene, deren *Gleichung* (6) ist, *Schmiegungsebene* an der Stelle $t=0$, kürzer *Ebene der Kurve* an dieser Stelle. Diese Ebene wird weiterhin dem Zeichen u zugeordnet.

Von diesen Figuren handeln eine Anzahl von Lehrsätzen wie die folgenden:

[5]. „Die Gerade an der Stelle $t=0$ ist die *einzige* Grenzlage der Geraden, die den Punkt $x(0)$ mit Nachbarpunkten $x(t)$ $\{|t|<r\}$ verbinden.“ $(t\to 0.)$

„Die Gerade an der Stelle $t=0$ ist die *einzige* Grenzlage der Geraden, die die Ebene $u(0)$ mit Nachbarebenen $u(t)$ $\{|t|<r\}$ verbinden.“ $(t\to 0.)$

„Die Ebene an der Stelle $t=0$ ist die *einzige* Grenzlage der Ebenen, die die Gerade an dieser Stelle mit den Punkten von Nachbarstellen verbinden.“

„Der Punkt an der Stelle $t=0$ ist die *einzige* Grenzlage der Punkte, die die Gerade an dieser Stelle mit den Ebenen von Nachbarstellen verbinden.“

„Die Ebene an der Stelle $t=0$ ist die *einzige* Grenzlage der Ebenen, die den Punkt $x(0)$ mit den Geraden von Nachbarstellen verbinden“.

„Der Punkt an der Stelle $t=0$ ist die *einzige* Grenzlage der Punkte, die die Ebene $u(0)$ mit den Geraden von Nachbarstellen verbinden.“

[6]. „Die Gerade an der Stelle $t=0$ ist *einzige* Grenzlage der Geraden zugehöriger Nachbarstellen $\{|t|<r\}$, und die Ebene an dieser Stelle *einzige* Grenzlage der Ebenen von Nachbarstellen.“

[28]) y, z sind Zeichen für veränderliche *Punkte* (Koordinatenquadrupel $y_\varkappa$, $z_\varkappa$); v, w sind ebenso Zeichen für veränderliche *Ebenen*.

In einer hinreichend engen Umgebung der Stelle $t=0$, also für alle hinreichend kleinen Werte der Zahl r ist nämlich für alle diese Nachbarstellen $a=1$, $b=2$, $c=3$. Für sie werden also Tangente und Schmiegungsebene dargestellt durch die einfacheren Gleichungen

$$(7) \qquad (xx'yz)_t=0, \qquad (xx'x''z)_t=0 \qquad (t \neq 0).$$

Läßt man in den Ausdrücken links t gegen Null konvergieren, so reduzieren sie sich, nach Abspaltung möglichst hoher Potenzen von t, auf numerische Multipla der Ausdrücke links in (5) und (6). Nach Abspaltung der genannten Faktoren beginnen dann die Entwickelungen der Ausdrücke (7) mit Vielfachen von

$$t^{b-a} \text{ und } t^{c-b}.$$

Es empfiehlt sich, neben den Zeichen a, b, c noch andere

$$(8) \qquad \boxed{k_1=a-1, \qquad k_2=b-a-1, \qquad k_3=c-b-1}$$

zu gebrauchen. Wir nennen dann das Zahlentripel

$$(k_1,\ k_2,\ k_3)$$

die *Charakteristik* der Stelle $t=0$, die einzelnen Zahlen k_1, k_2, k_3 die charakteristischen Zahlen dieser Stelle.

Ist $k_1=0$, so sagen wir, der zur Stelle $t=0$ gehörige Punkt sei *regulär*, andernfalls nennen wir ihn *singulär* oder *stationär*.

Ebenso reden wir, wenn k_2 oder $k_3=0$ ist, von einer zur Stelle $t=0$ gehörigen *regulären* Geraden (Tangente) oder (Schmiegungs-)Ebene, und wir brauchen im entgegengesetzten Falle wiederum die Worte *singulär* und *stationär*.

Ist $(k_1, k_2, k_3)=(0,0,0)$, so betrachten wir die Figur *Punkt, Gerade, Ebene*, die zur Stelle $t=0$ gehört, kürzer diese Stelle selbst, als *regulär*, andernfalls als *singulär*. An jeder „singulären Stelle" ist also *mindestens* eine der Figuren Punkt, Gerade, Ebene stationär.

Die singulären Stellen der Kurve bilden höchstens eine abzählbare Menge[29]).

[7]. „Gehört zur Stelle $t=0$ einer unebenen Kurve die Charakteristik (k_1, k_2, k_3), so gehört zur entsprechenden Stelle jeder korrelativen Kurve die Charakteristik (k_3, k_2, k_1)." Anders ausgedrückt: Die Zahlen k_3, k_2, k_1

[29]) Die hier ausgeschlossenen ebenen Kurven sind, als Kurven im projektiven Punktkontinuum von *drei* (komplexen) Dimensionen betrachtet, als *ganz aus singulären Stellen bestehend* anzusehen. Die Schmiegungsebene ist dann, wenn die Geraden ausgeschlossen werden, immer stationär; bei einer Geraden ist die Tangente stationär, die Schmiegungsebene unbestimmt.

haben für eine als Ort von *Ebenen* (∞^1 — eigentlich ∞^2 — Ebenen) gegebene unebene Kurve dieselbe Bedeutung wie die Zahlen k_1, k_2, k_3 für dieselbe Kurve, wenn sie, wie zuvor, als Ort von *Punkten* gegeben ist oder doch als solcher Punktort betrachtet wird.

Daß eine als Ort von Punkten x gegebene unebene analytische Kurve einen analytischen Ort von Ebenen u bestimmt, findet seinen Ausdruck in der Substitution

$$(9) \qquad (uz) = (xx'x''z) \qquad \{t, z\};$$

daß diese Ebenen auch wieder den Ort der Punkte x bestimmen, wird ausgedrückt durch die als Folge von (9) bestehende Identität

$$(10) \qquad (uu'u''w) = -(xx'x''x''')^2 \cdot (wx) \qquad \{t, w\}.$$

[8]. „Ist der zur Stelle $t = 0$ gehörige *Punkt* x regulär ($k_1 = 0$), so ist die zugehörige Gerade *einzige* Grenzlage auch aller Geraden, die zwei benachbarte Punkte

$$\{|t_1| < r, |t_2| < r\}$$

verbinden ($t_1, t_2 \to 0, 0$)."

„Ist die zur Stelle $t = 0$ gehörige *Ebene* u regulär ($k_3 = 0$), so ist die zugehörige Gerade *einzige* Grenzlage auch aller Geraden, die zwei benachbarte Ebenen

$$\{|t_1| < r, |t_2| < r\}$$

verbinden ($t_1, t_2 \to 0, 0$)."

„Ist die zur Stelle $t = 0$ gehörige Gerade regulär ($k_2 = 0$), so ist

die zugehörige Ebene *einzige* Grenzlage aller Ebenen, die den Punkt $t = 0$ mit zwei Nachbarpunkten der Kurve verbinden."

der zugehörige Punkt *einzige* Grenzlage aller Punkte, die die Ebene $t = 0$ und zwei Nachbarebenen der Kurve verbinden."

„Sind an der Stelle $t = 0$ Punkt *und* Gerade regulär ($k_1 = k_2 = 0$), so ist die zugehörige Ebene *einzige* Grenzlage der Ebenen, die drei dem Punkte $t = 0$ benachbarte Punkte der Kurve verbinden."

„Sind an der Stelle $t = 0$ Ebene *und* Gerade regulär ($k_3 = k_2 = 0$), so ist der zugehörige Punkt *einzige* Grenzlage der Punkte, die drei der Ebene $t = 0$ benachbarte Ebenen der Kurve verbinden."

Unter [9] wird nur noch einer von zwei zueinander korrelativen Lehrsätzen angeführt:

[9]. „Es sei w eine Ebene, die der Kurvenpunkt $t = 0$ enthält, und $w + dw$ eine ihr hinreichend benachbarte Ebene, *die den Punkt* $t = 0$ *nicht enthält*.

Wenn dann w die Gerade des Punktes $t = 0$ nicht enthält, so gibt es in $w + dw$

$$a = k_1 + 1$$

dem Punkte $t=0$ benachbarte Punkte der Kurve, die in der Grenze $dw=0$ in den Punkt $t=0$ hineinrücken.

Wenn zweitens w die Gerade des Punktes $t=0$ enthält, aber von der zugehörigen Ebene verschieden ist, so gibt es

$$b = k_1 + k_2 + 2$$

Punkte der genannten Art.

Endlich gibt es

$$c = k_1 + k_2 + k_3 + 3$$

solche Punkte, wenn w die Ebene des Punktes $t=0$ ist[30])."

Hiernach darf man sagen, daß an der Stelle $t=0$ *die Ebene* w *mit der Kurve je nach Umständen* k_1+1, *oder* k_1+k_2+2, *oder* $k_1+k_2+k_3+3$ *zusammenfallende Punkte gemein hat; ferner, daß an dieser Stelle die Kurve* k_1+k_2+2 *Punkte und* k_2+k_3+2 *Ebenen mit ihrer Tangente, und — wie zuvor — daß sie dort* $k_1+k_2+k_3+3$ *Punkte mit ihrer Ebene und ebenso viele Ebenen mit ihrem Punkte gemein hat.* Ferner wird man sagen dürfen, der Punkt $t=0$ der Kurve sei *ein* (k_1+1)*-facher Punkt* von ihr, oder er habe die *Multiplizität* k_1+1. Als korrelativ dazu ergibt sich die Redeweise, daß die Ebene der Kurve an der Stelle $t=0$ die *Multiplizität* k_3+1 hat, oder daß sie *eine* (k_3+1)*-fache Ebene der Kurve* ist[31]).

[10]. „Bezeichnet H einen linearen Linienkomplex, der die Gerade der Stelle $t=0$ enthält, *nicht aber das ganze Büschel* (x, u), *das durch den entsprechenden Punkt und die entsprechende Ebene bestimmt wird*, und ist der Komplex $\mathsf{H}+d\mathsf{H}$ dem Komplex H hinreichend benachbart, ohne die Gerade der Stelle $t=0$ zu enthalten, so gibt es in ihm k_2+1 Geraden der Kurve, die in der Grenze $d\mathsf{H}=0$ in die Gerade $t=0$ hineinrücken."

Wir sagen daher, daß die Gerade der Stelle $t=0$ *eine* (k_2+1)*-fache Gerade der Kurve* sei, oder daß sie die *Multiplizität* k_2+1 habe.

Ist H singulär, d. h. ist H der Sekantenkomplex einer Geraden H^*, so besagt die Voraussetzung des Satzes **[10]**, daß H^* die Gerade der Stelle $t=0$ trifft, *aber weder den Punkt* $x(0)$ *noch die Ebene* $u(0)$ *enthält* [weder durch den Punkt $x(0)$ geht noch in der Ebene $u(0)$ liegt]. Eine geeignete benachbarte Gerade $\mathsf{H}^*+d\mathsf{H}^*$ wird dann von k_2+1 *getrennten*

---

[30]) Es läßt sich immer $w+dw=w+\lambda\cdot dw_1$ so wählen, daß in der ganzen betrachteten Umgebung der Stelle $t=0$ die a oder b oder c Punkte voneinander verschieden bleiben, so lange $\lambda \neq 0$ ist.

[31]) Es kommt hier überall *nur* der eine durch eine Ungleichung der Form $|t|<r$ zu bezeichnende Zweig der Kurve in Betracht.

Geraden der Kurve getroffen[31]). Das heißt, es gibt Geraden $H^* + dH^*$ dieser Art.

Die Geraden unserer Kurve bilden einen analytischen Ort, eine Linien- oder *Regelfläche* von besonderer Art, die gewöhnlich als Tangentenfläche der Kurve bezeichnet wird. Diese „Fläche" ist dann auch Ort von ∞^2 Punkten, den Punkten ihrer ∞^1 Geraden und ebenso ist sie Ort von ∞^2 Ebenen, den Ebenen ihrer Geraden. Unter den Punkten befinden sich ∞^1 ausgezeichnete, die den Punktort $x(t)$ bilden, und unter den Ebenen ∞^1 ausgezeichnete, die den Ort von Ebenen $u(t)$ bilden. Dem Begriff einer Geraden, die in einer Ebene $u(t)$ verläuft, entspricht korrelativ der Begriff einer Geraden, die durch einen Punkt $x(t)$ geht. Von den Geraden der ersten Art pflegt man zu sagen, daß sie die Tangentenfläche der Kurve *berühren*. Dasselbe muß man dann meines Erachtens auch von der Geraden der zweiten Art sagen, wenn man eine folgerecht gebildete Terminologie haben will. Nimmt man diese Redeweise an, so bilden also die Geraden, die die betrachtete Linienfläche „berühren", *zwei* analytische Linienkomplexe, deren einer aus allen Geraden in Ebenen $u(t)$, und deren anderer aus allen Geraden durch Punkte $x(t)$ besteht. Von der oben beschriebenen Geraden H^* ist dann zu sagen, daß sie die Gerade der Stelle $t = 0$ trifft, die zur Kurve gehörige Regelfläche aber *nicht berührt*.

In den folgenden Lehrsätzen sind die beiden Arten der Berührung wieder auseinandergehalten. An Stelle von H^* schreiben wir H.

[11]. „Trifft die Gerade H die Gerade (Kurventangente) der Stelle $t = 0$, so hat sie, als „Berührungsgerade" der von den Kurventangenten gebildeten Regelfläche,

die Multiplizität $k_2 + 1$,

wenn H weder den Punkt noch die Ebene der Stelle $t = 0$ enthält. Ist $k_2 = 0$, so heißt das nach dem Vorhergehenden, daß H die Regelfläche an der Stelle $t = 0$ *nicht* berührt.

Sie hat

die Multiplizität $k_2 + k_1 + 2$, wenn H den Punkt $x(0)$ aber nicht die Ebene $u(0)$ enthält.

die Multiplizität $k_2 + k_3 + 2$, wenn H die Ebene $u(0)$ aber nicht den Punkt $x(0)$ enthält.

Sie hat ferner

die Multiplizität $k_1 + k_2 + k_3 + 3$,

wenn H sowohl den Punkt $x(0)$ als auch die Ebene $u(0)$ enthält, ohne mit der Geraden der Stelle $t = 0$ zusammenzufallen.

Sie hat endlich

$$\textit{die Multiplizität } k_1 + 2k_2 + k_3 + 4,$$

wenn H die Gerade der Stelle $t = 0$ selbst ist."

Das heißt zum Beispiel im letzten Falle: Ersetzt man die Gerade H durch eine hinreichend benachbarte Gerade $\mathsf{H} + d\mathsf{H}$, so hat diese mit der Tangentenfläche $k_1 + 2k_2 + k_3 + 4$ (in der Regel *getrennte*) Geraden der Kurve gemein, *die alle in der Grenze* $d\mathsf{H} = 0$ *in die Gerade der Stelle* $t = 0$ *hineinrücken.*

Zum Beweise bediene man sich des besonderen Koordinatensystems, auf das sich die Formeln (4) beziehen. Bezeichnet man dann die gemachten Voraussetzungen der Reihe nach mit (a), (b), (b′), (c), (d), so werden sie analytisch ausgedrückt durch die Annahmen

$$
\begin{array}{lll}
(\mathrm{a}) & \mathsf{H}_{23} = 0, & \mathsf{H}_{31} \neq 0, \\
(\mathrm{b}) & \mathsf{H}_{23} = \mathsf{H}_{31} = \mathsf{H}_{12} = 0, & \mathsf{H}_{03} \neq 0, \\
(\mathrm{b}') & \mathsf{H}_{23} = \mathsf{H}_{31} = \mathsf{H}_{03} = 0, & \mathsf{H}_{12} \neq 0, \\
(\mathrm{c}) & \mathsf{H}_{23} = \mathsf{H}_{31} = \mathsf{H}_{12} = \mathsf{H}_{03} = 0, & \mathsf{H}_{02} \neq 0, \\
(\mathrm{d}) & \mathsf{H}_{23} = \mathsf{H}_{31} = \mathsf{H}_{12} = \mathsf{H}_{02} = \mathsf{H}_{03} = 0, & (\mathsf{H}_{01} \neq 0).
\end{array}
$$

Hieraus ergeben sich der Reihe nach die gesuchten Multiplizitäten:

$$
\begin{array}{lr}
(\mathrm{a}) & b - a = k_2 + 1, \\
(\mathrm{b}) & b = k_2 + k_1 + 2, \\
(\mathrm{b}') & c - a = k_2 + k_3 + 2, \\
(\mathrm{c}) & c = k_1 + k_2 + k_3 + 3, \\
(\mathrm{d}) & b + c - a = k_1 + 2k_2 + k_3 + 4.
\end{array}
$$

[12]. *Liegt die (nach Voraussetzung unebene) Kurve $x(t)$ in einem linearen Komplex*[31]), *so ist dieser nicht singulär, und an jeder Stelle der Kurve ist*

$$k_1 = k_3 \qquad \{a + b = c\}. \tag{11}$$

Das ist so gut wie selbstverständlich, wird aber hervorgehoben, weil es hier gerade auf diese Tatsache besonders ankommt.

Wir werden in diesem Falle $\varkappa$ und $\varkappa_2$ an Stelle von $k_1 = k_3$ und k_2 schreiben; die Charakteristik einer Kurve dieser Art ist also

$$(\varkappa, \varkappa_2, \varkappa),$$

wofür, wenn es sich nur um solche Kurven handelt, auch das einfachere

[31]) D. h., gehören alle ihre Geraden diesem Komplex an.

Zeichen $(\varkappa, \varkappa_2)$ gebraucht werden kann[33]). $(\varkappa, \varkappa_2)$ ist dann die *Charakteristik* irgendeiner Stelle eines nicht-zyklischen *Vereins*, wenn der im Satze [12] genannte Komplex der Komplex $\Xi_{01} - \Xi_{23} = 0$ ist.

Ferner findet das Gesagte unmittelbare Anwendung auf die unebenen analytischen Kurven $x(t)$, die auf einer irreduziblen Fläche 2. Ordnung liegen, insbesondere also auf die Kurven, die auf der nicht-singulären Fläche $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$ enthalten sind. Aber auch in diesem Falle (wie übrigens in dem jeder anderen irreduzibelen algebraischen Fläche) können die Zahlen k_1, k_2, k_3 nicht beliebig vorgeschrieben werden. Suchen wir die zwischen ihnen bestehende Abhängigkeit zu ermitteln!

Stellt man, wie in § 1, die betrachtete Fläche durch zwei Paare von Verhältnisgrößen $(\mathfrak{l}, \mathfrak{r})$ oder (l, r) dar, so genügt es

$$l_1 : l_2 = 1 : \varphi(t), \qquad r_1 : r_2 = 1 : \psi(t)$$

zu setzen, und dabei noch anzunehmen, daß $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$ und eine der Funktionen $\varphi(t)$ oder $\psi(t)$, etwa $\varphi(t)$, eine Potenz von t ist. Eine weitere unwesentliche Spezialisierung liefert dann die Formeln

$$(12) \qquad \begin{aligned} x_0 &= 1, & x_1 &= t^{\sigma}\{t^{\tau} + \ldots\}, \\ x_2 &= t^{\tau} + \ldots, & x_3 &= t^{\sigma}, \end{aligned}$$

aus denen sich in allen Fällen die Charakteristik (k_1, k_2, k_3) bestimmen läßt[34]). Das Ergebnis ist der Satz:

[13]. *Liegt die unebene Kurve $x(t)$ auf einer nicht-singulären Fläche 2. Ordnung, so bestehen die folgenden Möglichkeiten:*

(A). *Die Tangente an der Stelle $t = 0$ ist nicht Erzeugende der Fläche und es ist*

$$(13) \qquad k_1 = k_2 \qquad \{b = 2a\}.$$

Die Schmiegungsebene dort ist dann nicht Tangentialebene der Fläche.

(B). *Die Tangente an der Stelle $t = 0$ ist nicht Erzeugende der Fläche, und es ist*

$$(14) \qquad k_1 = k_2 + k_3 + 1 \qquad \{c = 2a\}.$$

---

[33]) Deutet man die Linienkoordinaten der Tangenten einer Kurve $x(t)$ als Punktkoordinaten im Raume von fünf (komplexen) Dimensionen, so erhält man wieder eine Kurve mit charakteristischen Zahlen $K_1, \ldots, K_5$ oder, wenn die gegebene Kurve in einem linearen Linienkomplex liegt, eine Kurve mit charakteristischen Zahlen $K_1, \ldots, K_4$. Tritt der hier genannte zweite Fall ein, so wird $K_1 = K_4$ und $K_2 = K_3$. Genauer:

$$(K_1, K_2, K_3, K_4) = (\varkappa_2, \varkappa, \varkappa, \varkappa_2).$$

[34]) Man muß der Reihe nach verschiedene Annahmen machen, die wir hier übergehen. Der Leser findet sie im nächsten Paragraphen unter den Nummern (1), (2), (5) und (8) zusammengestellt.

Die zugehörige Schmiegungsebene berührt dann die Fläche 2. *Ordnung, und zwar im Punkte* $x(0)$.

(C, D). *Die Tangente an der Stelle* $t = 0$ *ist Erzeugende der Fläche* 2. *Ordnung. Dann ist*

$$k_1 = k_3 \qquad \{a + b = c\}, \tag{15}$$

und die Schmiegungsebene ist Tangentialebene der Fläche im Punkte $x(0)$.

Der letzte Fall ist mit **(C, D)** bezeichnet, weil wir hier später wiederum zwei Fälle zu unterscheiden haben werden:

$$\begin{array}{ll} \textbf{(C)} & k_2 \equiv 1 \\ \textbf{(D)} & k_2 \equiv 0 \end{array} \quad (\text{mod. } 2).$$

In allen drei Fällen lassen sich die Zahlen k_1, k_2, k_3 oder a, b, c sehr leicht mit Hilfe von Operationen erklären, die auf der Fläche 2. Ordnung selbst verlaufen. Wird die Fläche als Kugel aufgefaßt, so läßt sich z. B. c beschreiben als Zahl der Punkte, die die Kurve bei $t = 0$ mit ihrem *Krümmungskreis* gemein hat[35]). In den Fällen **(B)** und **(C, D)** ist dann dieser Krümmungskreis reduzibel, ein Nullkreis. Durch stereographische Projektion erhält man noch einen ganz ähnlich lautenden Satz für ebene Kurven im Möbiusschen Punktkontinuum (dem der Inversionsgeometrie).

6. Die charakteristischen Zahlen einander entsprechender Kurven $x(t)$ und $\xi(t)$.

Durch die letzten Sätze **[12]** und **[13]** in § 5 ist die Behandlung einer Frage vorbereitet, die uns nunmehr beschäftigen soll:

„*Es seien* $\varkappa, \varkappa_2$ *die charakteristischen Zahlen irgendeiner Stelle* $(t = 0)$ *der Bildkurve* $\xi(t)$ *irgendeines nicht-zyklischen Vereins, oder also dieses Vereins selbst. Welches sind dann die charakteristischen Zahlen* k_1, k_2, k_3 *des zugehörigen Punktortes* $x(t)$, *und umgekehrt?*"

Wir gehen in der folgenden Überlegung von der Kurve $x(t)$ als dem Gegebenen aus; wir haben dann, wie zuvor,

$$a = k_1 + 1, \qquad b = k_1 + k_2 + 2, \qquad c = k_1 + k_2 + k_3 + 3.$$

Entsprechend setzen wir

$$\alpha = \varkappa + 1, \qquad \beta = \varkappa + \varkappa_2 + 2, \qquad \gamma = 2\varkappa + \varkappa_2 + 3.$$

(Siehe Lehrsatz **[12]** in § 5.)

---

[35]) Man muß dann allerdings den Begriff des Krümmungskreises etwas anders fassen als üblich, nämlich so, daß uneigentliche Punkte *nicht* ausgeschlossen werden.

Ist t ein uniformisierender Parameter der Kurve $x(t)$ bei $t=0$, so hat t in der Regel dieselbe Eigenschaft auch für die Kurve $\xi(t)$, oder für jede einzelne der beiden Kurven $\xi(t)$, die aus $x(t)$ durch den Orientierungsprozeß entstehen. Dies ändert sich indessen, wenn die zur Orientierung von $x(t)$ dienende Quadratwurzel an der Stelle $t=0$ verzweigt ist. Für die Kurve $\xi(t)$ ist dann nicht mehr t, sondern $s=\sqrt{t}$ ein uniformisierender Parameter. Die Folge hiervon ist, daß wir nun nicht mehr, wie im Satze **[13]**, drei, sondern vier Fälle **(A, B, C, D)** auseinanderzuhalten haben.

(A). Als der sogenannte allgemeine Fall ist der im Satze **[13]** zuerst genannte anzusehen, weil zu ihm die regulären Stellen gehören, die die Hauptmasse der Kurvenstellen bilden. Die entsprechende Annahme ist

$$(1) \qquad \varphi(t)=t^a, \qquad \psi(t)=t^a+\ldots.$$

Da $b=2a$ sein soll **[13, A]**, so muß die Entwicklung von $\psi(t)$ die Form

$$(2) \qquad \psi(t)=t^a+f\,t^{2a}+\ldots+f^{\sigma-1}t^{\sigma a}+g\,t^d+\ldots$$

haben, wobei notwendig einer der folgenden Fälle eintritt:

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \sigma a<d<(\sigma+1)a \qquad \{a>1,\ \sigma>1;\ c=d\};$$

$$(\mathrm{A}_2) \qquad d=(\sigma+1)a \qquad \{g+f^\sigma;\quad c=d\};$$

$$(\mathrm{A}_3) \qquad (\sigma+1)\,a<d \qquad \{c=(\sigma+1)a\}.$$

Wir behaupten, daß in allen drei Fällen

$$\alpha=a, \qquad \beta=c-a, \qquad \gamma(=\alpha+\beta)=c$$

wird.

Es genügt, die nötige Rechnung für den Fall (A_1) anzugeben, da sie in den beiden anderen Fällen ähnlich verläuft. Man hat dann $\varphi(t)=t^a$ und

$$\psi(t)=t^a\left\{\frac{1-(f t^a)^\sigma}{1-f t^a}+g\,t^{d-a}+\ldots\right\};$$

daher, weil $d-a<\sigma a$,

$$l_1:l_2=1:t^a, \quad r_1:r_2=1-f t^a:t^a+g\,t^d+\ldots,$$

sodann, nach Berechnung der Wurzelgrößen $\sqrt{(m\,m')}$ und $\sqrt{(n\,n')}$, und nach Unterdrückung eines Homogeneitätsfaktors $\sqrt{a\,t^{\frac{a-1}{2}}}$:

$$(3) \qquad \begin{aligned} l_1&=1+\frac{1}{2}\frac{d}{a}g\,t^{d-a}+\ldots, & r_1&=1-f t^a,\\ l_2&=t^a+\frac{1}{2}\frac{d}{a}g\,t^d+\ldots, & r_2&=t^a+g\,t^d+\ldots;\end{aligned}$$

daher wird $l_1(0) : r_1(0) = 1 : 1$ und, wie behauptet,

$$\boxed{\alpha = a, \quad \beta = d - a = c - a, \quad \gamma = d = c.} \tag{4}$$

Außerdem ergibt sich noch, daß die Tangente des Punktes $\xi(0)$ nicht der absoluten Kongruenz angehört.

Auf ähnliche Art werden die weiteren Fälle behandelt.

(B). Bei dieser Annahme hat man

$$\varphi(t) = t^a, \quad \psi(t) = t^a + f t^b + \dots \qquad \{f \neq 0\}. \tag{5}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 + \frac{f}{2}\frac{b}{a} t^{b-a} + \dots, & r_1 &= 1, \\ l_2 &= t^a + \frac{f}{2}\frac{b}{a} t^b + \dots, & r_2 &= t^a + f t^b + \dots; \end{aligned} \tag{6}$$

jetzt ist also

$$\boxed{\alpha = b - a, \quad \beta = a, \quad \gamma = b.} \tag{7}$$

Ferner folgt, daß der Punkt $\xi(0)$ nicht auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz liegt, daß aber seine Tangente dieser Kongruenz angehört.

(C und D). Es genügt natürlich nunmehr, die Annahme zu machen, daß die Tangente des Punktes $x(0)$ (z. B.) eine *rechtseitige* Erzeugende der Fläche 2. Ordnung ist. Man hat dann $\sigma = a$, $\tau = b$, also

$$\varphi(t) = t^a, \quad \psi(t) = t^b + \dots \tag{8}$$

Weiter sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(C). Ist $a + b \equiv 0 \pmod 2$, so ist t ein uniformisierender Parameter auch für die Kurve oder für die zwei Kurven $\xi(t)$ bei $t = 0$; man erhält Entwickelungen der Form

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\frac{b}{a}}\left\{t^{\frac{b-a}{2}} + \dots\right\}, & r_1 &= 1, \\ l_2 &= \sqrt{\frac{b}{a}}\left\{t^{\frac{b+a}{2}} + \dots\right\}, & r_2 &= t^b + \dots, \end{aligned} \tag{9}$$

und, den zwei Werten der Wurzelgröße $\sqrt{b : a}$ entsprechend, *zwei* Kurvenstücke $\xi_{(1)}(t)$ und $\xi_{(2)}(t)$ in der Umgebung von $t = 0$, die durch das Bild der Umkehrung miteinander vertauscht werden. Der Punkt $\xi(0)$ liegt jetzt auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz; es folgt

$$\boxed{\alpha = \frac{b-a}{2}, \quad \beta = \frac{b+a}{2}, \quad \gamma = b.} \tag{10}$$

(D). Ist $a+b\equiv 1 \pmod 2$, so schreiten die Entwickelungen (9) nach Potenzen von $\sqrt{t}$ fort. $s=\sqrt{t}$ uniformisiert dann die Bildkurve in der Umgebung der Stelle $t=0$ oder $s=0$, weil $\sqrt{t}$ die doppelte Überdeckung von $x(t)$ bei $t=0$ uniformisiert. (9) ist also hier zu ersetzen durch

$$(11)\qquad \begin{aligned} l_1 &= \sqrt{\tfrac{b}{a}}\{s^{b-a}+\ldots\}, & r_1 &= 1,\\ l_2 &= \sqrt{\tfrac{b}{a}}\{s^{b+a}+\ldots\}, & r_2 &= s^{2b}+\ldots, \end{aligned}$$

wobei links nur Potenzen von s mit ungeraden Exponenten auftreten und rechts nur solche mit geraden Exponenten. Man erhält nur *ein* Kurvenstück

$$(12)\qquad \xi\left(\sqrt{\tfrac{b}{a}};\, s\right)=\xi\left(-\sqrt{\tfrac{b}{a}};\, -s\right),$$

und also immer auch nur *eine* Bildkurve, die bei der Spiegelung an den Leitlinien der absoluten Kongruenz (als Ganzes) in Ruhe bleibt. An Stelle der Formeln (10) erhält man jetzt

$$(13)\qquad \boxed{\alpha=b-a,\quad \beta=b+a,\quad \gamma=2b.}$$

Die aufgezählten Fälle erschöpfen natürlich auch schon die bei einer gegebenen Bildkurve vorliegenden Möglichkeiten; sie bilden also auch da eine vollständige Disjunktion.

Wir formulieren jetzt das Ergebnis unserer Untersuchung so, daß wir an Stelle von a, b, c und α, β, γ die charakteristischen Zahlen k_1, k_2, k_3 und $\varkappa, \varkappa_2$ einführen.

VI. *Für einen nicht-zyklischen Verein orientierter Elemente oder seine Bildkurve $\xi(s)$ und für die entsprechende Kurve $x(t)$ bestehen an einer beliebigen Stelle $(s=0, t=0)$ die folgenden Möglichkeiten:*

(A). *Die Tangente des Punktes $x(0)$ ist nicht Erzeugende der Fläche 2. Ordnung und seine Schmiegungsebene ist nicht Ebene dieser Fläche.*	**(A).** *Die Tangente des Punktes $\xi(0)$ liegt nicht in der absoluten Kongruenz.*

Die charakteristischen Zahlen der Punkte $x(0)$ und $\xi(0)$ sind verbunden durch die Gleichungen

$$(k_1, k_2, k_3)=(\varkappa, \varkappa, \varkappa_2).$$

(B). *Die Tangente des Punktes $x(0)$ ist nicht Erzeugende der Fläche 2. Ordnung, aber seine Schmiegungsebene ist Ebene der Fläche.*	**(B).** *Der Punkt $\xi(0)$ liegt nicht auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz, aber seine Tangente ist eine Gerade dieser Kongruenz.*

Die zugehörigen charakteristischen Zahlen sind verbunden durch die Gleichungen

$$(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa + \varkappa_2 + 1, \varkappa, \varkappa_2).$$

(C). *Die Tangente des Punktes* $x(0)$ *ist Erzeugende der Fläche* 2. *Ordnung und es ist*

$$\boxed{k_2 \equiv 1 \pmod 2.}$$

(C). *Der Punkt* $\xi(0)$ *liegt auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz, seine Umgebung erlaubt aber nicht die zugehörige projektive Spiegelung.*

Die charakteristischen Zahlen genügen dann den Gleichungen

$$(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa_2, 2\varkappa + 1, \varkappa_2).$$

(D). *Die Tangente des Punktes* $x(0)$ *ist Erzeugende der Fläche* 2. *Ordnung und es ist*

$$\boxed{k_2 \equiv 0 \pmod 2.}$$

(D). *Der Punkt* $\xi(0)$ *liegt auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz und seine Umgebung gestattet die zu dieser gehörige Spiegelung.*

Die charakteristischen Zahlen genügen den Gleichungen

$$(k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{\varkappa_2 - 1}{2}, \varkappa, \frac{\varkappa_2 - 1}{2}\right).$$

Es ist also dann

$$\boxed{\varkappa \equiv 0 \pmod 2, \quad \varkappa_2 \equiv 1 \pmod 2.}$$

Einer Erläuterung bedarf wohl noch die Formulierung der Voraussetzungen unter **(C)** und **(D)** rechts. Es liegen nämlich tatsächlich *drei* Möglichkeiten vor, von denen hier zwei unter **(C)** zusammengefaßt werden mußten. Sei s ein uniformisierender Parameter der Kurve $\xi(s)$ bei $s = 0$ und sei $\xi(0)$ auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz gelegen, so kann es zunächst sein, daß die Punkte des Kurvenzweiges, der bei verschwindendem s den Punkt $\xi(0)$ liefert, durch die Spiegelung an den Leitlinien der absoluten Kongruenz gepaart werden. Dies wird analytisch dadurch ausgedrückt, daß die Gleichungen

$$-l_1(s) : -l_2(s) : r_1(s) : r_2(s) = l_1(s_1) : l_2(s_1) : r_1(s_1) : r_2(s_1)$$

für hinreichend kleine Werte von s oder s_1 $\{|s| < r, |s_1| < r_1\}$ nach s_1 oder s aufgelöst werden können. Dies ist der Fall **(D)**. Man kann dann den uniformisierenden Parameter s insbesondere so wählen, daß $s_1 = -s$ wird (vgl. Nr. 12); $t = s^2$ wird dann ein uniformisierender Parameter der Kurve $x(t)$ bei $s = 0$ oder $t = 0$; der Verein $\xi(s)$ ist *zweizählig*.

Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so liegt der Fall **(C)** vor. Wie in den Fällen **(A)** und **(B)** ist dann $t = s$ uniformisierender Parameter der Kurve $x(t)$ bei $t = 0$ oder $s = 0$. *Aber der zugehörige Verein*

kann dann noch ein- oder zweizählig sein: Die Kurve $\xi(s)$ wird *entweder* mit einer anderen gepaart, die ebenfalls einen Zweig durch den Punkt $\xi(0)$ schickt *oder* sie wird mit ihr selbst, aber so gepaart, daß zwei *verschiedene* Zweige von ihr, die beide den Punkt $\xi(0)$ enthalten, einander entsprechen. *Welche von beiden Möglichkeiten vorliegt, läßt sich offenbar nur durch Betrachtung der Kurve $x(t)$ oder $\xi(t)$ im Ganzen, also nur von Fall zu Fall und dann mit Mitteln entscheiden, die wir praktisch nicht immer zur Verfügung haben.*

Aus dem Bewiesenen geht hervor, daß regulären Punkten der einen Kurve nicht immer ebensolche der anderen zugeordnet werden. Es wird nützlich sein, die Bedingungen noch besonders zu formulieren, unter denen einem regulären Punkte der einen Kurve ein singulärer der anderen entspricht:

Einem regulären Punkte $x(0)$ der Kurve $x(t)$ entspricht immer dann und nur dann ein singulärer Punkt $\xi(0)$ der Kurve $\xi(s)$ — oder jeder von zwei Bildkurven $\xi_{(1)}(s)$, $\xi_{(2)}(s)$ —, wenn seine Tangente singulär (und folglich eine Erzeugende der Fläche 2. Ordnung) ist, und wenn sie überdies von der Kurve $x(t)$ bei $t=0$ mehr-als-dreipunktig berührt wird.

$$\{a=1, \quad b>3; \quad k_1=0, \quad k_2>1\}.$$

Einem regulären Punkte $\xi(0)$ der Kurve $\xi(s)$ entspricht immer dann und nur dann ein singulärer Punkt der Kurve $x(t)$, wenn seine Tangente der absoluten Kongruenz angehört und außerdem eine von zwei weiteren Bedingungen erfüllt ist:

Entweder der Punkt $\xi(0)$ liegt nicht auf einer Leitlinie der absoluten Kongruenz;

oder er liegt auf einer dieser Leitlinien und seine Tangente ist singulär

$$\{\alpha=1, \quad \beta>2; \quad \varkappa=0, \quad \varkappa_2>0\}.$$

Natürlich sind die charakteristischen Zahlen k_1, k_2, k_3, die zu einer Stelle der Kurve $x(t)$ gehören, nur unveränderlich gegenüber der Gruppe (G_6, H_6), die durch *Erweiterung* — Hinzufügung der Orientierung und der Umkehrung als einer besonderen Transformation — aus der Gruppe (G_6^*, H_6^*) der automorphen Kollineationen der Fläche 2. Ordnung entsteht, während die Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa_2$ zur Gruppe G_{10} oder Γ_{10} gehören.

7. Die Singularitätengleichung.

Aus der in § 5 angestellten Untersuchung geht hervor, daß die singulären Stellen einer Kurve $x(t)$ des projektiven Punktkontinuums in gewisser Weise zusammengefaßt werden können. Ist nämlich, wie dort vorausgesetzt worden war, t ein uniformisierender Parameter für die be-

trachtete Stelle und sind die Koordinaten $x_\varkappa(t)$ durch gewöhnliche Potenzreihen dargestellt, *die an der Stelle selbst nicht gleichzeitig den Wert Null annehmen*, so ist dort der Differentialausdruck $(x\,x'\,x''\,x''')$ dann und nur dann von Null verschieden oder es sind die Punkte x, x', x'', x''' dann und nur dann linear unabhängig, wenn die Stelle regulär ist. Allgemein hat $(x\,x'\,x''\,x''')$ an der zu den charakteristischen Zahlen k_1, k_2, k_3 gehörigen Stelle t unter den genannten Voraussetzungen eine Nullstelle der Ordnung

(1) $$a + b + c - 6 = 3\,k_1 + 2\,k_2 + k_3.\text{[36]}$$

Wir wollen die Gleichung

$$(x\,x'\,x''\,x''') = 0$$

die *Singularitätengleichung* der Kurve $x(t)$ nennen. Aus dem eben Gesagten, sowie namentlich im Hinblick auf den letzten Satz in § 6, ergibt sich nun die Frage: „Wie stellt sich die Singularitätengleichung dar, wenn die Kurve $x(t)$ der Punktort zu einem in Parameterdarstellung gegebener Verein ist?"

Wir setzen nochmals einige in § 5 (Nr. 9, 10) schon aufgestellte Formeln her:

(2) $$(u\,z) = (x\,x'\,x''\,z) \qquad \{t, z\},$$

(3) $$(u\,u'\,u''\,w) = -(x\,x'\,x''\,x''')^2 \cdot (w\,x) \qquad \{t, w\},$$

und ziehen daraus nunmehr die Folgerung

(4) $$(u\,u'\,u''\,u''') = (x\,x'\,x''\,x''')^3, \qquad \{t\},$$

die zeigt, daß die zu (1) korrelative Gleichung

$$(u\,u'\,u''\,u''') = 0$$

dasselbe aussagt, wie die Gleichung (1).

Wollen wir jetzt dieselben Formeln auf die Bildkurve $\xi(s), \varphi(s)$ {statt $x(t), u(t)$} eines orientierten Vereins anwenden, so müssen wir noch der Tatsache Rechnung tragen, daß diese Kurve in einem linearen Komplex, und zwar in einem ein für allemal gegebenen linearen Komplex liegt. Sehen wir zu, was daraus folgt!

Führen wir die Abkürzung

(5) $$[\xi\,|\,\eta] = \xi_0\,\eta_1 - \xi_1\,\eta_0 - \xi_2\,\eta_3 + \xi_3\,\eta_2$$

---

[36]) Der Ausdruck $(x\,x'\,x''\,x''')$, eine sogenannte Wronskische Determinante, ist eine bekannte Differentialinvariante der Gruppe aller Kollineationen. — Auf die allgemeine Theorie dieser Differentialinvarianten, die ein umfangreiches Kapitel bildet und im ganzen einer angemessenen Behandlung noch harrt, kann hier nicht eingegangen werden.

ein, und setzen wir, ähnlich wie oben unter (2), aber nunmehr unter Differentiation nach s,

(6) $$(\varphi\eta) = (\xi\xi'\xi''\eta) \qquad \{s, \eta\},$$

so muß jedenfalls eine Gleichung der Form

(a) $$(\varphi\eta) = \varrho(s)\cdot[\xi\,|\,\eta] \qquad \{s, \eta\}$$

bestehen, da ja die Ebene (Schmiegungsebene) des Punktes $\xi(s)$ überall Nullebene dieses Punktes im Nullsystem $[\xi\,|\,\eta] = 0$ ist. Es gilt also auch

(b) $$(\xi\xi'\xi''\xi''') = \varrho(s)\cdot[\xi\,|\,\xi'''] \qquad \{s\};$$

ferner hat man nach (3) und (4):

(c) $$(\varphi\varphi'\varphi''\omega) = -(\xi\xi'\xi''\xi''')^2\cdot(\xi\omega) \qquad \{s, \omega\},$$

(d) $$(\varphi\varphi'\varphi''\varphi''') = (\xi\xi'\xi''\xi''')^3 \qquad \{s\}.$$

Aus (a) folgt aber

$$(\varphi\varphi'\varphi''\omega) = \varrho^3(s)\cdot\begin{vmatrix} -\xi_1 & \xi_0 & \xi_3 & -\xi_2 \\ -\xi_1' & \xi_0' & \xi_3' & -\xi_2' \\ -\xi_1'' & \xi_0'' & \xi_3'' & -\xi_2'' \\ \omega_0 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix},$$

also, wenn

$$\omega_0 = -\xi_1''', \qquad \omega_1 = \xi_0''', \qquad \omega_2 = \xi_3''', \qquad \omega_3 = -\xi_2'''$$

substituiert wird, nach (c):

$$\varrho^3(s)\cdot(\xi\xi'\xi''\xi''') = (\xi\xi'\xi''\xi''')^2\cdot[\xi\,|\,\xi''']$$

und schließlich zufolge (b):

$$\varrho^2(s) = [\xi\,|\,\xi''']^2 \qquad \{s\}.$$

Irgendein Beispiel[37]) oder auch eine nur die niedersten Potenzen von s berücksichtigende Rechnung liefert dann den Wert von ϱ selbst, $\varrho(s) = [\xi\,|\,\xi''']$, und damit hat man die Formeln

(7) $$\boxed{(\varphi\eta) = (\xi\xi'\xi''\eta) = [\xi\,|\,\xi''']\cdot[\xi\,|\,\eta] \qquad \{s, \eta\}},$$

(8) $$\boxed{(\xi\xi'\xi''\xi''') = [\xi\,|\,\xi''']^2 \qquad \{s\}}.$$

Dazu ist noch zu bemerken, daß zufolge

(9) $$[\xi\,|\,\xi'] = 0, \qquad [\xi\,|\,\xi''] = 0 \qquad \{s\}$$

---

[37]) Es genügt ein Beispiel, da die analytischen Kurven im Komplex ein Kontinuum (eine analytische Mannigfaltigkeit von unendlich vielen Dimensionen) bilden. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

noch die Gleichung

$$(10)\qquad [\xi\,|\,\xi'''] = -[\xi'\,|\,\xi''] \qquad \{s\}$$

besteht.

Die Gleichung (7) enthält den exakten analytischen Ausdruck der Tatsache, daß die Kurve $\xi(s)$ autokorrelativ ist in bezug auf das Nullsystem $[\xi\,|\,\eta] = 0$ (so zwar, daß jedem Punkt seine eigene Schmiegungsebene zugeordnet wird), und (8) zeigt, daß die Singularitätengleichung hier durch die einfacher gebaute Gleichung

$$(11)\qquad [\xi\,|\,\xi'''] = 0 \quad \text{oder} \quad [\xi'\,|\,\xi''] = 0$$

ersetzt werden kann. Nach (9) und (11) sind an singulären Stellen, und nur an solchen, hier schon die Punkte ξ, ξ', ξ'' linear-abhängig, und allgemein hat der Differentialausdruck $[\xi\,|\,\xi''']$ unter den zuvor genannten Voraussetzungen bei s eine Nullstelle der Ordnung

$$(12)\qquad \underline{2\varkappa + \varkappa_2}.$$

Wollen wir nun die Kurve $\xi(t)$ als Bild eines orientierten Vereins auffassen, so bedienen wir uns neben den Zeichen $\xi_0 \ldots \xi_3$ wieder der zuvor verwendeten l, r:

$$\xi_0 = l_1, \quad \xi_1 = l_2, \quad \xi_2 = r_1, \quad \xi_3 = r_2.$$

Die Linienkoordinaten der Geraden (Tangente) des Punktes $\xi(s)$ werden dann

$$(13)\qquad \begin{aligned} \Xi_{01} &= l_1 l_2' - l_2 l_1', & \Xi_{23} &= r_1 r_2' - r_2 r_1', \\ \Xi_{02} &= l_1 r_1' - r_1 l_1', & \Xi_{31} &= r_2 l_2' - l_2 r_2', \\ \Xi_{03} &= l_1 r_2' - r_2 l_1', & \Xi_{12} &= l_2 r_1' - r_1 l_2', \end{aligned}$$

und es ist allgemein, d. h. für alle zulässigen Werte von s,

$$(14)\qquad \Xi_{01} = \Omega = \Xi_{23},$$

so daß bei Benutzung des hier angeführten neuen Zeichens Ω

$$(15)\qquad \Omega^2 + \Xi_{02}\,\Xi_{31} + \Xi_{03}\,\Xi_{12} = 0 \qquad \{t\}$$

wird.

Wir erhalten nun den Ort der Punkte x des Vereins, der dem Punktort $\xi(x)$ entspricht, wie früher dargestellt durch die Formeln

$$(16)\qquad x_0 = l_1 r_1, \quad x_1 = l_2 r_2, \quad x_2 = l_1 r_2, \quad x_3 = l_2 r_1,$$

und für die zugehörige Tangente ergeben sich die Linienkoordinaten

$$(17)\qquad \begin{aligned} X_{01} &= l_1 l_2 + r_1 r_2, & X_{02} &= l_1^2, & X_{03} &= r_1^2, \\ X_{23} &= -l_1 l_2 + r_1 r_2, & X_{31} &= l_2^2, & X_{12} &= -r_2^2; \end{aligned}$$

endlich erhalten wir für die Koordinaten (oder vielmehr für die Verhältnisse der Koordinaten) der Schmiegungsebene der Kurve $x(s)$ die Ausdrücke

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
u_0 &= \Xi_{31} = r_2 l_2' - l_2 r_2', \\
u_1 &= -\Xi_{02} = r_1 l_1' - l_1 r_1', \quad {}^{38}) \\
u_2 &= \Xi_{12} = l_2 r_1' - r_1 l_2', \\
u_3 &= \Xi_{03} = l_1 r_2' - r_2 l_1';
\end{aligned}
$$

woraus noch

$$
(19)\qquad u_0 u_1 - u_2 u_3 = \Xi_{01}\,\Xi_{23} = \Omega^2
$$

folgt. Außerdem hat man

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
&(u x) = 0, \quad (u x') = 0, \quad (u x'') = 0 \qquad \{s\}, \\
&(u' x) = 0, \quad (u' x') = 0, \quad (u'' x) = 0 \qquad \{s\};
\end{aligned}
$$

die letzten Gleichungen $(u x'') = 0$ und $(u'' x) = 0$ ergeben sich nämlich vermöge $(l l'') - (r r'') = 0$, was aus $(l l') - (r r') = 0$ folgt[39]). Nebenher ergibt sich eine allerdings ohne weiteres vorauszusehende, aber nicht unwichtige Ergänzung einer früher (§ 1, S. 45) angestellten Betrachtung:

VII. *Die Orientierung eines durch Ebenenkoordinaten bestimmten irreduziblen ebenen Schnittes der absoluten Fläche* $(x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0)$ *erfolgt durch Entscheidung über den Wert der Wurzelgröße*

$$
(21)\qquad \Omega = \sqrt{u_0 u_1 - u_2 u_3}\,. \quad {}^{40})
$$

Wir sind nunmehr in der Lage, den Differentialausdruck $(x x' x'' x''')$ zu berechnen. Wir erhalten nämlich zunächst, wenn $X_{ik} = p_i q_k - p_k q_i$ gesetzt wird,

---

[38]) Am einfachsten so: Man drücke aus, daß eine Gerade H der absoluten Kongruenz

$$
\mathrm{H}_{01} = 0, \quad \mathrm{H}_{02} = l_1 r_1, \quad \mathrm{H}_{03} = l_1 r_2, \quad \mathrm{H}_{23} = 0, \quad \mathrm{H}_{31} = -l_2 r_2, \quad \mathrm{H}_{12} = l_2 r_1
$$

die Gerade Ξ schneidet. Das gibt die Gleichung

$$
\Xi_{31} l_1 r_1 - \Xi_{02} l_2 r_2 + \Xi_{12} l_1 r_2 + \Xi_{03} l_2 r_1 = 0,
$$

die identisch sein muß mit

$$
u_0 l_1 r_1 + u_1 l_2 r_2 + u_2 l_1 r_2 + u_3 l_2 r_1 = 0.
$$

Diese Größen u_k sind natürlich zu denen der Formel (2) nur proportional. Siehe Formel (22).

[39]) $(u x)$ ist Abkürzung für

$$
u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3;
$$

$(l l')$, mit Veränderlichen eines binären Gebietes, Abkürzung für

$$
l_1 l_2' - l_2 l_1'.
$$

[40]) Tritt an Stelle der genannten Fläche irgendeine nicht-singuläre Fläche 2. Ordnung, symbolisch $(a x)^2 = 0$, so tritt an Stelle des Radikanden von Ω die Kovariante $(u \alpha)^2 = \frac{1}{6}(a a' a'' u)^2$ der quadratischen Form $(a x)^2$. Ist, wie im vorliegenden besonderen Falle, $(a x)^2 = 2(x_0 x_1 - x_2 x_3)$, so wird $(u \alpha)^2 = 2(u_0 u_1 - u_2 u_3)$.

$$(x x' y z) = \Omega \cdot (p q y z) \qquad \{s, y, z\},$$
$$(p q x'' z) = -2\Omega \cdot (u z) \qquad \{s, z\},$$
$$(u x''') = -(u' x'') = (u'' x') = -(u''' x) =$$
$$= -2\Omega \cdot [\xi \,|\, \xi'''] = 2\Omega \cdot [\xi' \,|\, \xi''] \qquad \{s\};$$

mithin

$$(22) \qquad \boxed{(x x' x'' z) = -2\Omega^2 \cdot (u z)} \qquad \{s, z\}$$

und

$$(23) \qquad \boxed{(x x' x'' x''') = 4\Omega^3 \cdot [\xi \,|\, \xi''']} \qquad \{s\}$$

oder ausführlich:

$$(x x' x'' x''') = 4\Omega^3 \cdot \{l_1 l_2''' - l_2 l_1''' - r_1 r_2''' + r_2 r_1'''\}.$$

Hiermit ist also, unter anderem, der Differentialausdruck $(x x' x'' x''')$, *in mehrere — nicht weiter zerlegbare — Faktoren gespalten. Das Verschwinden des Faktors* $[\xi \,|\, \xi'''] = -[\xi' \,|\, \xi'']$ *sagt aus, daß die Bildkurve* $\xi(s)$ *ein singuläres Flächenelement (Punkt-Ebene) hat. Das Verschwinden des anderen Faktors* $\Omega(s)$ *— der in der dritten Potenz auftritt — bedeutet, daß die Gerade* $\Xi(s)$ *der Bildkurve in der absoluten Kongruenz liegt*[41]).

Zur Würdigung dieses Tatbestandes ist zu beachten, daß der Ausdruck $(x x' x'' x''')$ hier nicht die Voraussetzungen zu erfüllen braucht, die zur Aufstellung der Gleichung (1) geführt haben. Vielmehr werden da, wo die Kurve $\xi(s)$ eine Leitlinie der absoluten Kongruenzen trifft, die Koordinaten $x_i(s)$ alle zugleich den Wert Null annehmen. Wir wissen ja auch schon nach dem Satze von § 6, daß unter den eben erwähnten Bedingungen der Ort der Punkte x nicht notwendig eine singuläre Stelle zu haben braucht. Nennen wir λ den Grad des Verschwindens von Ω, so wird nach (12) und (23)

$$(24) \qquad \underline{3\lambda + 2\varkappa + \varkappa_2}$$

der Grad des Verschwindens von $(x x' x'' x''')$. Es ist aber in den Fällen **(A)**, **(B)**, **(C, D)**, die wir in Satz VI unterschieden hatten,

$$(25) \qquad \begin{aligned} &\textbf{(A)}\ \ \lambda = \varkappa, \\ &\textbf{(B)}\ \ \lambda = \varkappa + \varkappa_2 + 1, \\ &\textbf{(C, D)}\ \ \lambda = 2\varkappa + \varkappa_2 + 2. \end{aligned}$$

Nur in den Fällen **(A)**, **(B)** liefert vermöge dieser Substitutionen die Formel (24) denselben Wert wie die Formel (1), in den Fällen **(C, D)** aber liefert sie einen größeren Wert.

(Fortsetzung folgt.)

[41]) Natürlich immer unter der Voraussetzung, daß die Koordinaten des Punktes ξ nicht sämtlich an der betrachteten Stelle verschwinden.

(Eingegangen am 10. 7. 1921.)

Elementarer Beitrag zur Variationsrechnung.

Von

A. Hammerstein in Tübingen.

Bekanntlich sind die notwendigen Bedingungen für das starke Minimum von $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$ nicht hinreichend. Umgekehrt ist aber auch die Weierstraßsche hinreichende Bedingung nicht notwendig, d. h. die wirkliche Extremale $\overset{0}{y}(x)$ kann mit einem Feld von der Beschaffenheit umgeben sein, daß für alle Punkte x, y desselben, außer den auf der Extremalen $\overset{0}{y}(x)$ gelegenen ein Wert $\tilde{p}$ existiert, so daß[1]) $E(x, y, p, \tilde{p}) < 0$ ist und $\overset{0}{y}(x)$ dennoch ein Minimum liefert. Dies zeigt folgendes Beispiel: $\int\limits_1^2 (x y'^4 + y y'^3)\,dx$ mit den Nebenbedingungen $y(1) = 0$, $y(2) = 0$ soll zum Minimum gemacht werden. Die Schar paralleler Geraden $y =$ konst. umgibt die wirkliche Extremale $\overset{0}{y}(x) = 0$ mit einem Feld, und es ist $E(x, y, \tilde{p}) = x\tilde{p}^4 + y\tilde{p}^3 < 0$ für von 0 verschiedenes y und alle $\tilde{p}$ zwischen 0 und $-\frac{y}{x}$. Die Minimumseigenschaft für $\overset{0}{y}(x) = 0$ folgt unmittelbar aus der für alle zulässigen Vergleichsfunktionen $y(x)$ gültigen Identität

$$\int\limits_1^2 (x y'^4 + y y'^3)\,dx = \int\limits_1^2 (x y'^4 + y y'^3)\,dx - \frac{1}{8}\int\limits_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y^4}{4x^2}\right) dx$$

$$= \int\limits_1^2 \left\{\left(\sqrt{x}\, y'^2 + \frac{y}{2\sqrt{x}}\, y' - \frac{y^2}{8x\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{3}{64}\frac{y^4}{x^3}\right\} dx.$$

Das Ziel der Arbeit ist nun darzutun, daß die Frage nach dem starken Minimum von $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$ für solche Funktionen $f(x, y, y')$,

---

[1]) Die Bezeichnungen, soweit sie nicht besonders erklärt werden, sind die in dem Lehrbuch „Vorlesungen über Variationsrechnung“ von O. Bolza gebrauchten.

die in y' schwächer als von erster Ordnung unendlich werden, und solche, die stärker als von erster Ordnung negativ unendlich werden, in elementarer Weise entschieden werden kann (Satz 1 und 2). Zuletzt wird noch gezeigt, daß für solche Funktionen, die sich dem Satze 1 und 2 nicht unterordnen, die bisherigen Bedingungen im wesentlichen ausreichen (Satz 3).

Definitionen. x_1 und x_2 seien gegebene reelle Zahlen, $x_1 < x_2$. Für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ seien die Funktionen $G_1(x) < G_2(x)$ eindeutig und stetig. Unter einem Bereich R werde der Bereich der x, y-Ebene $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $G_1(x) < y < G_2(x)$ verstanden, wobei jedoch auch die Werte $G_1 = -\infty$ oder $G_2 = \infty$ zugelassen sind. In R seien zwei Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben.

Unter einer zulässigen Funktion oder Kurve werde eine für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ eindeutige, einmal stetig differentiierbare Funktion $y = y(x)$, die den Bedingungen $y_1 = y(x_1)$, $y_2 = y(x_2)$ und $G_1(x) < y(x) < G_2(x)$ genügt, verstanden.

Satz 1. Die Funktion $f(x, y, y')$ sei für alle Werte x, y in einem Bereich R und alle reellen y' eindeutig und stetig. Ferner sei in R gleichmäßig

$$\lim_{y'=\infty} \frac{f(x,y,y')}{y'} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y'=-\infty} \frac{f(x,y,y')}{y'} = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine zulässige Funktion $\overset{0}{y}(x)$ dem Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))\,dx$ einen nicht größeren Wert erteilt als alle andern zulässigen Funktionen $y(x)$, ist

$$(1) \qquad f(x, y, y') \geqq f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))$$

für alle Werte x, y in R und alle reellen y'.

Beweis. Daß die Bedingung hinreicht, leuchtet ein. Ihre Notwendigkeit wird erwiesen sein, wenn folgendes gezeigt ist: Zu einer zulässigen Funktion $\overset{0}{y}(x)$, zu der ein Wertepaar x_3, y_3 im Innern von R und ein Wert y_3' existiert, so daß $f(x_3, y_3, y_3') < f(x_3, \overset{0}{y}(x_3) \overset{0}{y}{}'(x_3))$ ist, kann eine zulässige Funktion $y_\nu(x)$ gefunden werden, für welche $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_\nu(x), y_\nu'(x))\,dx < \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), \overset{0}{y}{}'(x))\,dx$ ist. Sei also $\overset{0}{y}(x)$ eine solche Funktion und $f(x_3, y_3, y_3') - f(x_3, \overset{0}{y}(x_3), \overset{0}{y}{}'(x_3)) = -2\varkappa < 0$.

Aus Stetigkeitsgründen können zwei Werte x_4 und x_5 mit folgenden Eigenschaften gewählt werden:

1. $x_1 < x_4 < x_3 < x_5 < x_2$.

2. Die Gerade $g_1(x) = y_3 + (x - x_3)\,y_3'$ verläuft für $x_4 \leqq x \leqq x_5$ ganz in R und $g_1(x_4)$ ist von $\overset{0}{y}(x_4)$, $g_1(x_5)$ von $\overset{0}{y}(x_5)$ verschieden.

3. Für $x_4 \leqq x \leqq x_5$ ist $f(x, g_1(x), g_1'(x)) - f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x)) \leqq -\varkappa$. Somit hat man

$$(2) \qquad \int_{x_4}^{x_5} \{f(x, g_1(x), g_1'(x)) - f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))\}\,dx \leqq -\varkappa(x_5 - x_4).$$

Nunmehr werde ein Punkt x_6 folgendermaßen angenommen: 1. $x_1 < x_6 < x_4$. 2. Für $x_6 \leqq x \leqq x_4$ verläuft die Gerade $g_2(x) = \overset{0}{y}(x_6) + (g_1(x_4) - \overset{0}{y}(x_6))\dfrac{x - x_6}{x_4 - x_6}$ ganz in R. Mit m werde die von x_6 unabhängige obere Schranke von $|g_1(x_4) - \overset{0}{y}(x_6)|$ für alle für x_6 möglichen Werte bezeichnet. Da wegen Annahme 2. $|g_2'(x)|$ unbegrenzt wächst, wenn x_6 sich x_4 nähert, kann nach der Voraussetzung des Satzes von x_6 überdies gefordert werden, daß für $x_6 \leqq x \leqq x_4$

$$\left|\frac{f(x, g_2(x), g_2'(x)) - f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))}{g_2'(x)}\right| < \frac{\varkappa(x_5 - x_4)}{4m}$$

ist. Daraus folgt

$$(3) \qquad \left|\int_{x_6}^{x_4} \{f(x, g_2(x), g_2'(x)) - f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))\}\,dx\right| < \frac{\varkappa}{4}(x_5 - x_4).$$

Ebenso kann ein Wert x_7 derart gewählt werden, daß $x_5 < x_7 < x_2$ ist, und für $g_3(x) = \overset{0}{y}(x_7) + (g_1(x_5) - \overset{0}{y}(x_7))\dfrac{x - x_7}{x_5 - x_7}$

$$(4) \qquad \left|\int_{x_5}^{x_7} \{f(x, g_3(x), g_3'(x)) - f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))\}\,dx\right| < \frac{\varkappa}{4}(x_5 - x_4)$$

wird. Für die Funktion

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \overset{0}{y}(x) & \text{für } x_1 \leqq x \leqq x_6, \\ g_2(x) & \text{,,} \quad x_6 \leqq x \leqq x_4, \\ g_1(x) & \text{,,} \quad x_4 \leqq x \leqq x_5, \\ g_3(x) & \text{,,} \quad x_5 \leqq x \leqq x_7, \\ \overset{0}{y}(x) & \text{,,} \quad x_7 \leqq x \leqq x_2 \end{cases}$$

ist zufolge von (2), (3) und (4)

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) - f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))\}\,dx < \frac{-\varkappa}{2}(x_5 - x_4) < 0.$$

Nach dem Lemma von der Abrundung der Ecken[3]) ist hiermit die Behauptung bewiesen.

---

[3]) z. B. Bolza, a. a. O. § 14c.

Zusatz 1. $f(x, y, y')$ sei nach allen Argumenten zweimal stetig differentiierbar. Faßt man x als Parameter auf, so muß, falls ein $\overset{0}{y}(x)$ existiert, das dem Integral ein Minimum erteilt, dem Satz 1 zufolge $f(x, y, y')$ als Funktion der zwei unabhängigen Variablen y und y' ein Minimum für alle x zwischen x_1 und x_2 und $y = \overset{0}{y}(x)$, $y' = \overset{0}{y}{}'(x)$ haben. Dies liefert für $\overset{0}{y}(x)$ die Bedingungsgleichungen

$$(5) \qquad f_y(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x)) = 0$$

und

$$(6) \qquad f_{y'}(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x)) = 0 \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

die zur Berechnung von $\overset{0}{y}(x)$ und $\overset{0}{y}{}'(x)$ dienen können; freilich sind die sich hieraus ergebenden Werte nur dann eine Lösung, wenn $\frac{d\overset{0}{y}(x)}{dx} = \overset{0}{y}{}'(x)$ ist, und überdies (1) erfüllt wird. Ferner hat man als notwendige Bedingung, daß die Form

$$(7) \quad h^2 f_{yy} + 2hk f_{yy'} + k^2 f_{y'y'} \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \; y = \overset{0}{y}(x), y' = \overset{0}{y}{}'(x)$$

und alle h und k nicht negativ ist. Aus (5) und (6) folgt die Eulersche Differentialgleichung $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$. Aus (7) folgt, daß die zweite Variation nicht negativ sein kann und hieraus bekanntlich die Jacobische Bedingung. Aus (6) und (1) folgt endlich die Weierstraßsche notwendige Bedingung $E(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x), \tilde{p}) \geqq 0$ für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ und alle $\tilde{p}$.

Beispiele. 1. $\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt[3]{1 + y'^2}\, dx$ hat nach (1) nur ein Minimum für die Geraden $y(x) =$ konst.

2. $\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{-x + yy' + (1 - 2x) y'^2}{(1 + y'^2)^2}\, dx$. Die bisherige Theorie liefert hier keine Entscheidung[8]). Aus (5) geht hervor, daß nur die Geradenschar $y(x) =$ konst. Extremalen liefern kann. (1) zeigt, daß für keine Wahl der Nebenbedingungen ein Minimum existiert.

Schließlich sei bemerkt, daß *die Frage nach dem Extremum des Kurvenintegrals* $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$, *wo* y' *in* f *nicht enthalten ist, durch Satz* 1 *beantwortet wird.*

---

[8]) Vgl. Bolza, O.: A fifth necessary condition for a strong extremum of the integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx$. Transactions of the American Mathematical Society 7 Nr. 2.

Zusatz 2. In einem Bereich R und für alle y' sei die Funktion $F(x, y, y')$ eindeutig und stetig, und daselbst existiere gleichmäßig $\lim\limits_{y'=\infty} \frac{F(x,y,y')}{y'} = u(x,y)$ und $\lim\limits_{y'=-\infty} \frac{F(x,y,y')}{y'} = u(x,y)$, wo $u(x,y)$ eine in R einmal stetig nach x und y differentiierbare Funktion bedeute. Die Fragen nach dem Minimum von $\int\limits_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$ läßt sich sofort auf Satz 1 zurückführen. Bezeichnet nämlich $v(x,y)$ eine in R stetig differentiierbare Funktion, die der Differentialgleichung $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ genügt, so ist bekanntlich $\int\limits_{x_1}^{x_2} (u(x,y)\,y' + v(x,y))\,dx$ eine vom Integrationsweg unabhängige Konstante. Setzt man $f(x,y,y') = F(x,y,y') - u(x,y)\,y' - v(x,y)$, welches den Voraussetzungen zu Satz 1 genügt, so hat $\int\limits_{x_1}^{x_2} F\,dx$ gleichzeitig mit $\int\limits_{x_1}^{x_2} f\,dx$ ein Minimum.

Satz 2. Die Funktion $f(x, y, y')$ sei für alle Werte x, y in einem Bereich R und alle y' eindeutig und stetig. Im Innern von R existiere mindestens ein Wertpaar x_3, y_3, in dessen Umgebung gleichmäßig entweder

$$\liminf_{y'=\infty} \frac{f(x,y,y')}{y'} = -\infty \tag{8}$$

oder

$$\liminf_{y'=-\infty} \frac{f(x,y,y')}{|y'|} = -\infty \tag{9}$$

ist. Dann kann unter allen zulässigen Funktionen $y(x)$ keine dem Integral $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$ einen kleineren Wert erteilen als die übrigen.

Beweis. Der Beweis wird geführt, indem zu einer beliebig gegebenen zulässigen Funktion $\overset{0}{y}(x)$ eine andere zulässige Funktion $y_\nu(x)$ derart hergestellt wird, daß

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y_\nu(x), y_\nu'(x))\,dx - \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))\,dx < 0 \tag{10}$$

ist.

Nach Voraussetzung gibt es ein ganz in R gelegenes Quadrat Q mit dem Mittelpunkt x_3, y_3 und fester Seitenlänge $2l$ derart, daß zu jedem gegebenen positiven K eine dem absoluten Betrage nach unbegrenzt wachsende Folge y_λ' existiert, so daß $\frac{f(x,y,y_\lambda')}{|y_\lambda'|} \leq -K$ für alle x, y in Q ist.

Es bedeute $\bar{y}_3$ den Wert $y_3 + l$, wenn Voraussetzung (8) gilt, dagegen den Wert $y_3 - l$, wenn (9) gilt. Jetzt verbinde man die Punkte (x_1, y_1)

mit (x_3, y_3), und (x_2, y_2) mit $(x_3+l, \bar{y}_3)$ durch je eine einmal stetig differentiierbare Kurve $y_1(x)$ bzw. $y_2(x)$, die ganz in R verläuft.

Zur Abkürzung werde

$$\Big|\int_{x_1}^{x_2} f(x, \mathring{y}(x), \mathring{y}'(x))\,dx\Big| = K_0, \qquad \Big|\int_{x_1}^{x_3} f(x, y_1(x), y_1'(x))\,dx\Big| = K_1,$$

$$\Big|\int_{x_3+l}^{x_2} f(x, y_2(x), y_2'(x))\,dx\Big| = K_2$$

gesetzt. Für alle x_4, die der Ungleichung $x_3 \leqq x_4 \leqq x_3 + l$ genügen, sei K_3 das von x_4 unabhängige Maximum von $\Big|\int_{x_4}^{x_3+l} f(x, \bar{y}_3, \bar{y}_3')\,dx\Big|$. Es kann nun ein Wert x_4 so gewählt werden, daß für alle x, y in Q

$$\frac{f\left(x, y, \dfrac{\bar{y}_3 - y_3}{x_4 - x_3}\right)}{\left|\dfrac{\bar{y}_3 - y_3}{x_4 - x_3}\right|} < -\frac{1}{l}(K_0 + K_1 + K_2 + K_3)$$

wird. Demnach ist,

$$g(x) = y_3 + \frac{\bar{y}_3 - y_3}{x_4 - x_3}(x - x_3)$$

gesetzt,

$$\int_{x_3}^{x_4} f(x, g(x), g'(x))\,dx < -(K_0 + K_1 + K_2 + K_3).$$

Die Funktion

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_3, \\ g(x) & \text{,,} \quad x_3 \leqq x \leqq x_4, \\ \bar{y}_3 & \text{,,} \quad x_4 \leqq x \leqq x_3 + l, \\ y_2(x) & \text{,,} \quad x_3 + l \leqq x \leqq x_2 \end{cases}$$

erteilt der linken Seite von (10) in der Tat einen negativen Wert, womit unter Berücksichtigung des Lemmas von der Abrundung der Ecken die Behauptung bewiesen ist.

Folgerung. Das Integral über eine ganze rationale Funktion von y' mit in x und y stetigen Koeffizienten kann, wenn ihr Grad ungerade und größer als 1 ist, kein starkes Minimum haben; wenn der Grad dagegen gerade ist, nur wenn der Koeffizient der höchsten Potenz in einer Umgebung einer etwaigen wirklichen Extremalen nirgends negativ wird.

Beispiel. $\int_{x_1}^{x_2} (-y^2 y'^4 + y'^2)\,dx$ mit den Nebenbedingungen $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ hat kein Minimum, obwohl die Jacobische, Legendresche und Weierstraßsche notwendige Bedingung erfüllt ist[4]).

[4]) Das Beispiel rührt von Carathéodory her. Archiv f. Mathematik und Physik (3) 10 (1916), S. 185.

Nachdem durch Satz 2 solche Funktionen ausgeschlossen werden können, die stärker als y' negativ unendlich werden, soll jetzt ein Satz hergeleitet werden, der sich auf Funktionen, die in R wie y' positiv oder negativ unendlich werden oder stärker wie y' positiv unendlich werden, bezieht.

Satz 3. Die Funktion $f(x, y, y')$ sei für alle x, y in einem Bereich R und alle y' dreimal stetig differentiierbar. Die wirkliche Extremale $\overset{0}{y}(x)$ lasse sich mit einem Feld, in welchem das Gefälle $p(x, y)$ beschränkt ist, umgeben. Es gebe im Feld eine im Endlichen gelegene Umgebung U_0 von $\overset{0}{y}(x)$, so daß darin gleichmäßig in x und y entweder

$$\liminf_{y'=\infty} \frac{f(x,y,y')}{y'} = \infty \tag{11}$$

ist, oder gleichmäßig

$$\lim_{y'=\infty} \frac{f(x,y,y')}{y'} = u_+(x, y) \tag{12}$$

existiert und stetig ist, und ebenso, daß entweder

$$\liminf_{y'=-\infty} \frac{f(x,y,y')}{|y'|} = \infty \tag{13}$$

ist, oder

$$\lim_{y'=-\infty} \frac{f(x,y,y')}{|y'|} = u_-(x, y) \tag{14}$$

existiert und stetig ist. Dabei sind alle Kombinationen der Bedingungen (11) und (12) mit (13) und (14) zugelassen. Zu den notwendigen Minimumsbedingungen für $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$, nämlich

$$f_{y'y'}(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x)) \geqq 0 \tag{15}$$

und

$$E(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x), \tilde{p}) \geqq 0 \tag{16}$$

für alle von $\overset{0}{y}{}'(x)$ verschiedenen $\tilde{p}$, treten, falls die Voraussetzungen (12) oder (14) gelten, die weiteren als notwendig hinzu:

$$\lim_{\tilde{p}=\infty} \frac{f(x, \overset{0}{y}(x), \tilde{p})}{\tilde{p}} - f_{y'}(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x)) \geqq 0 \tag{17}$$

bzw.

$$\lim_{\tilde{p}=-\infty} \frac{f(x, \overset{0}{y}(x), \tilde{p})}{|\tilde{p}|} + f_{y'}(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x)) \geqq 0 \tag{18}$$

$$\text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Bei Unterdrückung des Gleichheitszeichens sind die Bedingungen (15) und (16) unter Hinzunahme von (17) und (18), soweit diese vorhanden sind, auch hinreichend.

Beweis. Nach Definition ist

$$E(x, y, p, \tilde{p}) = \tilde{p}\left(\frac{f(x, y, \tilde{p})}{\tilde{p}} - f_{y'}(x, y, p) + o(\tilde{p})\right), \tag{19}$$

wo $o(\tilde{p})$ mit absolut wachsendem $\tilde{p}$ in U_0 gleichmäßig den Limes 0 hat.

Die Notwendigkeit der Bedingungen (17) und (18) ergibt sich für Voraussetzung (12) und (14) unmittelbar aus (19) und (16). Für Voraussetzung (11) und (13) ist nichts zu beweisen. Nunmehr werde gezeigt, daß die Bedingungen bei Unterdrückung des Gleichheitszeichens auch hinreichend sind. Zuerst sei angenommen, Voraussetzung (12) oder (14) gelte. Dann folgt auf Grund von Stetigkeitseigenschaften aus (17) bzw. (18), daß eine in U_0 enthaltene Umgebung U_1 von $\overset{0}{y}(x)$ und eine Zahl r existiert, so daß für alle x, y in U_1

$$u_+(x, y) - f_{y'}(x, y, p(x, y)) > r$$

bzw.

$$u_-(x, y) + f_{y'}(x, y, p(x, y)) > r$$

ist. Nun kann ein $\tilde{p}_0 > 0$ so gewählt werden, daß für alle x, y in U_1 und $|\tilde{p}| \geqq \tilde{p}_0$

$$\frac{f(x, y, \tilde{p})}{\tilde{p}} - f_{y'}(x, y, p(x, y)) > \frac{r}{2}$$

für positives $\tilde{p}$, bzw.

$$\frac{f(x, y, \tilde{p})}{|\tilde{p}|} + f_{y'}(x, y, p(x, y)) > \frac{r}{2}$$

für negatives $\tilde{p}$ ist, und überdies $|o(\tilde{p})| < \frac{r}{2}$ wird. Für x, y in U_1 und $|\tilde{p}| \geqq \tilde{p}_0$ ist infolgedessen nach (19) $E(x, y, p, \tilde{p}) > 0$.

Gilt hingegen Voraussetzung (11) oder (13), so kann, wenn M die obere Grenze von $f_{y'}(x, y, p(x, y))$ in U_0 bedeutet, ein $\tilde{p}_1 > 0$ so gewählt werden, daß $\frac{f(x, y, \tilde{p})}{|\tilde{p}|} > 2M$ ist für x, y in U_0 und $\tilde{p} \geqq \tilde{p}_1$ bzw. $-\tilde{p} \geqq \tilde{p}_1$, und überdies $|o(\tilde{p})| < M$ wird. Für x, y in U_0 und $\tilde{p} \geqq \tilde{p}_1$ bzw. $-\tilde{p} \geqq \tilde{p}_1$ ist demnach zufolge von (19) $E(x, y, p, \tilde{p}) > 0$. In jedem Fall gibt es also eine Umgebung U_2 von $\overset{0}{y}(x)$ und ein von x und y unabhängiges $\tilde{p}_2$, so daß $E(x, y, p, \tilde{p}) > 0$ ist für x, y in U_2 und $|\tilde{p}| \geqq \tilde{p}_2$.

Nach einem Satz von Lindeberg[5]) kann auf Grund von (15) und (16) bei Unterdrückung des Gleichheitszeichens zu diesem $\tilde{p}_2$ eine Umgebung U_3 von $\overset{0}{y}(x)$ derart gewählt werden, daß $E(x, y, p, \tilde{p}) \geqq 0$ ist für x, y in U_3 und $|\tilde{p}| \leqq \tilde{p}_2$. Somit wird für alle $\tilde{p}$ und x, y in dem U_2 mit

---

[5]) Zur Theorie des relativen Extremums der einfachen Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen, Mathemat. Annalen **59** (1904), S. 332–334.

U_3 gemeinsamen Gebiet $E(x, y, p, \tilde{p}) \geqq 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Im Falle $u_+(x, y) = -u_-(x, y)$ liefert Satz 3 zwar die notwendige Bedingung $u_+(x, y) = f_{y'}(x, \overset{0}{y}(x), \overset{0}{y}{}'(x))$, jedoch keine hinreichende. Die Entscheidung führt hier Satz 1 mit Zusatz 2 herbei.

Zum Schluß sei bemerkt, daß nach derselben Methode den Sätzen 1 und 2 analoge für das Minimum des Doppelintegrals und, mit einigen Modifikationen, solche für den Fall, daß die Funktion f höhere Ableitungen von y enthält, aufgestellt werden können.

(Eingegangen am 5. 3. 1922.)

Zum Waringschen Problem für rationale Zahlen und Polynome.

Von

E. Kamke in Münster i. W.

§ 1.[1])

Herr Siegel[2]) hat kürzlich bei Gelegenheit einer größeren Arbeit gezeigt, wie der Waring-Hilbertsche Satz über die Zerfällung von Zahlen in n-te Potenzen auf wenigen Zeilen aus der Hilbertschen Identität abgeleitet werden kann, wenn man sich nicht auf ganze Zahlen beschränkt, sondern auch rationale Zahlen zuläßt. Nach diesem Muster läßt sich aber auch ganz kurz und unmittelbar ein Satz über die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte beweisen, den ich vor kurzem aus einer schwieriger zu gewinnenden Verallgemeinerung des erwähnten Waring-Hilbertschen Satzes für ganze Zahlen hergeleitet habe[3]). Dabei mag dieser Satz, entsprechend dem Siegelschen Muster, ebenfalls gleich für Zahlkörper formuliert werden.

Satz. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $N = N(n)$ von folgender Art: Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und*

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu x^\nu$$

ein Polynom n-ten Grades mit Koeffizienten in K, mit[4]) $\alpha_n \succ 0$ *und mit*

[1]) Für den Inhalt von § 2 siehe dessen Anfang. Beide Paragraphen sind meiner Habilitationsschrift entnommen, die Ostern 1922 der Philos. Fakultät der Universität Münster i. W. vorgelegen hat.

[2]) *Darstellung total positiver Zahlen durch Quadrate* [Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 246–275]; Satz 2.

[3]) *Über die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte* [Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 323–328].

[4]) Sind α, β Zahlen des Körpers, so soll $\alpha \succ \beta$ bzw. $\alpha \prec \beta$ bedeuten, daß in allen reellen der konjugierten Körper $K^{(i)}$ die Ungleichung $\alpha^{(i)} > \beta^{(i)}$ bzw. $\alpha^{(i)} < \beta^{(i)}$

mindestens einer reellen Nullstelle in jedem reellen der konjugierten Körper[8]). *Es bezeichne* $u^{(i)}$ *die größte Nullstelle im konjugierten Körper* $K^{(i)}$, *sofern dieser reell ist. Dann ist für jede Zahl* $\zeta \succ 0$ *des Körpers die Gleichung*

$$(1)\qquad \zeta = \sum_{\varkappa=0}^{N} \varphi(\xi_\varkappa)$$

durch solche Zahlen $\xi_\varkappa$ *des Körpers lösbar, für welche in den reellen Körpern* $K^{(i)}$

$$(2)\qquad \xi_\varkappa^{(i)} > u^{(i)}$$

ist, also die Zahlen $\varphi(\xi_\varkappa) \succ 0$ *sind.*

Hierin ist für $\varphi(x) = x^n$ der Siegelsche Satz 2, für den Körper der rationalen Zahlen mein früherer Satz enthalten.

Für den Beweis wird der folgende Hilfssatz mehrfach gebraucht.

Hilfssatz. Es sei $K = K(\vartheta)$ ein nicht total imaginärer Körper, und es seien $K^{(1)}, \ldots, K^{(t)}$ die reellen unter den konjugierten Körpern. Dann gibt es bei gegebenem $\varepsilon > 0$ zu je t reellen Zahlen $v_1, \ldots, v_t$ eine solche Zahl ω des Körpers, daß

$$0 < \omega^{(i)} - v_i < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

ist.

Beweis. Es gibt ein Polynom $g(x)$ mit reellen Koeffizienten, das bzw. für $x = \vartheta^{(1)}, \ldots, \vartheta^{(t)}$ die Werte $v_1 + \frac{1}{2}\varepsilon, \ldots, v_t + \frac{1}{2}\varepsilon$ annimmt. Die Koeffizienten des Polynoms können so durch rationale Zahlen approximiert werden, daß für das neue Polynom $h(x)$

$$|h(\vartheta^{(i)}) - g(\vartheta^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

ist. Hieraus folgt aber wegen $g(\vartheta^{(i)}) = v_i + \frac{1}{2}\varepsilon$ für $\omega = h(\vartheta)$ die Behauptung.

Beweis des Satzes. Nach dem Hilfssatz 1 meiner Dissertation[9]) gibt es zu n solche natürlichen Zahlen $P; A_2, \ldots, A_{n+1}; r_1, \ldots, r_P$ und

---

besteht. Ist kein reeller unter den konjugierten Körpern vorhanden, d. h. K total imaginär, so wird durch $\alpha \succ \beta$ und $\alpha \prec \beta$ nichts ausgesagt. – Entsprechendes gilt für $\alpha \succeq \beta$ und $\alpha \preceq \beta$.

[8]) Wenn K total imaginär ist, fällt diese Bedingung fort; ebenso die Ungleichung (2).

[9]) *Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes* [Math. Ann. 83 (1921), S. 85–112].

ganze Zahlen $a_{\varkappa\lambda}$, daß für $\nu = 2, \ldots, n+1$ folgende n Identitäten mit den gleichen Zahlen P, $r_\varkappa$ und $a_{\varkappa\lambda}$ bestehen[7]):

$$A_\nu (x_1^2 + \ldots + x_9^2)^\nu = \sum_{\varkappa=1}^{P} r_\varkappa (a_{\varkappa 1} x_1 + \ldots + a_{\varkappa 9} x_9)^{2\nu}.$$

Bei zweimaliger Differentiation nach x_1 entstehen hieraus die n Identitäten

$$(3)\quad \begin{cases} A_{\nu+1}(x_1^2 + \ldots + x_9^2)^\nu + 2\nu A_{\nu+1} x_1^2 (x_1^2 + \ldots + x_9^2)^{\nu-1} \\ = (2\nu+1) \sum\limits_{\varkappa=1}^{P} r_\varkappa a_{\varkappa 1}^2 (a_{\varkappa 1} x_1 + \ldots + a_{\varkappa 9} x_9)^{2\nu} \quad (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Hierin wird $x_6 = \ldots = x_9 = 0$, $B_\nu = A_{\nu+1}/(2\nu+1)$ und die mit n gegebene natürliche Zahl $\sum\limits_{\varkappa=1}^{P} r_\varkappa a_{\varkappa 1}^2 = Q$ gesetzt. Da jede total positive Zahl des Körpers in vier Quadrate von Körperzahlen zerfällbar ist[8]), so ist für jede Zahl H_λ des Körpers mit $\mathsf{H}_\lambda^2 \prec 1$ die Gleichung

$$\mathsf{H}_\lambda^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 1$$

durch Zahlen $x_2, \ldots, x_5$ des Körpers lösbar. Daher folgen, wenn noch die Zahlen $a_{\varkappa 1}\mathsf{H}_\lambda + a_{\varkappa 2} x_2 + \ldots + a_{\varkappa 5} x_5$, jede $r_\varkappa a_{\varkappa 1}^2$-mal aufgeführt, in irgendeiner Reihenfolge mit $\eta_{1\lambda}, \ldots, \eta_{Q\lambda}$ bezeichnet werden, aus (3) für ein jedes derartiges H_λ die n Gleichungen

$$(4)\qquad B_\nu + 2\nu B_\nu \mathsf{H}_\lambda^2 = \sum_{\varkappa=1}^{Q} \eta_{\varkappa\lambda}^{2\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

wobei die $\eta_{\varkappa\lambda}$ Zahlen aus K sind. Da, wiederum nach dem eben angeführten Satze, jede Zahl H des Körpers mit $0 \prec \mathsf{H} \prec 1$ in der Form $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1^2 + \ldots + \mathsf{H}_4^2$ darstellbar und jedes dieser $\mathsf{H}_\lambda^2 \prec 1$ ist, folgt durch Addition der Gleichungen (4) für $\lambda = 1, 2, 3, 4$, daß für jedes $0 \prec \mathsf{H} \prec 1$ des Körpers die simultanen Darstellungen

$$(5)\qquad 4B_\nu + 2\nu B_\nu \mathsf{H} = \sum_{\varkappa=1}^{N} \eta_\varkappa^{2\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

gelten, wobei die B_ν gewisse mit n gegebene positive rationale Zahlen sind, $N = 4Q$ eine natürliche mit n gegebene Zahl ist und die $\eta_\varkappa$ gewisse Zahlen des Körpers sind.

Es sei nun $\zeta \succ 0$ eine gegebene Zahl des Körpers.

---

[7]) So mit Rücksicht auf § 2; für § 1 könnte von vornherein $x_6 = \ldots = x_9 = 0$ sein.
[8]) Siegel a. a. O., Satz 1.

Nach dem Hilfssatz gibt es im Körper eine Zahl ϱ mit*) $\varrho \overset{*}{>} u$ und mit $\varphi(\varrho) < \zeta/2N$. Es werde

$$\varphi(y+\varrho) = \psi_\varrho(y) = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu y^\nu$$

gesetzt. Dann sind die $\beta_\nu = \beta_\nu(\varrho)$ Zahlen in K, und es ist $\beta_n > 0$ sowie, da jedes $u^{(i)}$ die größte reelle Nullstelle war, $\beta_0 = \varphi(\varrho) > 0$.

In (5) werde nun die ν-te Zeile mit $\beta_\nu \gamma^\nu$ multipliziert, wo $\gamma > 0$ eine vorläufig noch willkürliche Zahl aus K ist. Werden die so entstehenden n Gleichungen addiert, und wird

$$\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \beta_\nu x^\nu, \qquad \tau(x) = \sigma'(x),$$

$$\xi_\varkappa = \gamma\eta_\varkappa^2 + \varrho \qquad (\varkappa = 1, \ldots, N)$$

gesetzt, so ergibt sich

$$N\beta_0 + 4\sigma(\gamma) + 2\mathrm{H}\gamma\tau(\gamma) = \sum_{\varkappa=1}^{N} \psi_\varrho(\gamma\eta_\varkappa^2)$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{N} \varphi(\xi_\varkappa),$$

wobei $\xi_\varkappa \geqq \varrho$, also $\xi_\varkappa \overset{*}{>} u$ ist. Hieraus folgt die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes, sobald gezeigt ist, daß es in K Zahlen H mit $0 < \mathrm{H} < 1$, $\gamma > 0$ und $\xi_0 \overset{*}{>} u$ gibt, so daß

$$(6) \qquad \varphi(\xi_0) + N\beta_0 + 4\sigma(\gamma) + 2\mathrm{H}\gamma\tau(\gamma) = \zeta.$$

Dieses läßt sich aber so beweisen: In jedem der reellen konjugierten Körper ist, wenn $\sigma^{(i)}(x)$ dadurch aus $\sigma(x)$ gebildet wird (und ebenso $\tau^{(i)}(x)$ aus $\tau(x)$ und später $\varphi^{(i)}(x)$ aus $\varphi(x)$), daß die Koeffizienten durch die konjugierten Zahlen ersetzt werden, $4\sigma^{(i)}(x) + x\tau^{(i)}(x)$ ein Polynom mit positivem höchsten Koeffizienten und ohne konstantes Glied, nimmt also für $x > 0$ jeden positiven Wert an; daher gibt es für jedes ξ_0 in K mit

$$(7) \qquad \xi_0 \overset{*}{>} u \quad \text{und} \quad \varphi(\xi_0) < \frac{1}{2}\zeta$$

zu jedem reellen konjugierten Körper wegen $\beta_0 < \zeta/2N$ eine positive Zahl $c^{(i)}$, so daß

$$(8) \qquad \zeta^{(i)} - \varphi^{(i)}(\xi_0^{(i)}) - N\beta_0^{(i)} = 4\sigma^{(i)}(c^{(i)}) + c^{(i)}\tau^{(i)}(c^{(i)})$$

---

*) Der Stern über dem Zeichen > oder < einer Ungleichung bedeutet, daß die Ungleichung für jeden reellen Körper $K^{(i)}$ gelten soll, nachdem an jeden in ihr vorkommenden Buchstaben oben der Index (i) angehängt ist. Ist K total imaginär, so sagt die Ungleichung nichts aus.

ist. Da $\tau^{(i)}(x)$ höchstens $n-1$ positive Nullstellen hat, kann dabei durch passende Wahl von ξ_0 innerhalb der Bedingungen (7), die wegen des Hilfssatzes möglich ist, überdies erreicht werden, daß in jedem reellen konjugierten Körper $\tau^{(i)}(c^{(i)}) \neq 0$ ist. Nach dem Hilfssatz gibt es dann eine Zahl $\gamma > 0$ in K, für welche die $\gamma^{(i)}$ so nahe an den (positiven) $c^{(i)}$ liegen, daß

$$|\gamma\tau(\gamma)| \overset{*}{>} \frac{1}{2}|c\tau(c)|$$

und

$$|4\sigma(c) + c\tau(c) - 4\sigma(\gamma) - \gamma\tau(\gamma)| \overset{*}{<} \frac{1}{2}|c\tau(c)|,$$

also

$$\overset{*}{<} |\gamma\tau(\gamma)|$$

ist. Für dieses γ ist mithin wegen (8)

$$(9) \qquad \gamma\tau(\gamma) - |\gamma\tau(\gamma)| \overset{*}{<} \zeta - \varphi(\xi_0) - N\beta_0 - 4\sigma(\gamma) \overset{*}{<} \gamma\tau(\gamma) + |\gamma\tau(\gamma)|.$$

Wird nun

$$\mathsf{H} = \frac{\zeta - \varphi(\xi_0) - N\beta_0 - 4\sigma(\gamma)}{2\gamma\tau(\gamma)}$$

gesetzt, so ist H eine Zahl des Körpers und erfüllt wegen (9) sowohl bei positivem wie bei negativem $\tau^{(i)}(\gamma^{(i)})$ die Ungleichungen $0 < \mathsf{H} < 1$ und schließlich auch (6).

§ 2.

Das Siegelsche Verfahren liefert auch einen Satz Waringscher Art für rationale Funktionen.

Herr Landau[10]) hat auf Grund des im § 1 erwähnten Satzes über die Zerfällbarkeit jeder total positiven Zahl eines Körpers in vier Quadrate gezeigt, daß sich jedes definite rationalzahlige[11]) Polynom von x als Summe von acht Quadraten rationalzahliger Polynome von x darstellen läßt.

Herr Fleck[12]) hat die Zerfällung definiter rationalzahliger Polynome in 4. und 6. Potenzen von Polynomen in Angriff genommen, ohne jedoch — was in der Natur der Sache begründet ist — zu ähnlich allgemeinen Ergebnissen zu kommen, wie sie über die Zerfällung von *ganzen Zahlen* in Potenzen bekannt sind.

---

[10]) *Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate* [Math. Ann. 62 (1906), S. 272–285].

[11]) Ein Polynom heißt rationalzahlig, wenn die Koeffizienten rationale Zahlen sind. Eine rationale Funktion heißt rationalzahlig, wenn sie als Quotient zweier rationalzahliger Polynome geschrieben ist.

[12]) *Über die Darstellung gewisser ganzer rationalzahliger definiter Funktionen als Summen von vierten resp. sechsten Potenzen ganzer rationalzahliger Funktionen* [Math. Ann. 64 (1907), S. 567–572].

Läßt man demgegenüber bei der Darstellung auch rationale Funktionen zu, so besteht folgender

Satz. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl $N = N(n)$ von folgender Art: Ist $g(x)$ eine definite*[13]) *rationale rationalzahlige Funktion vom Grad $m = \mu n$ (μ gerade, $\gtreqless 0$), so gibt es N rationale rationalzahlige Funktionen $\xi_\varkappa(x)$ mit nirgends verschwindenden Nennern, so daß*

$$g(x) = \sum_{\varkappa=1}^{N} \xi_\varkappa^n(x), \qquad \xi_\varkappa(x) \geqq 0$$

ist.

Für den Beweis wird der Weierstraßsche Approximationssatz erweitert zu dem

Hilfssatz 1. Es sei $f(x)$ eine stetige reelle Funktion, für die

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = \lim_{x=-\infty} f(x) = L \tag{10}$$

vorhanden ist. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine rationale rationalzahlige Funktion $R(x)$ mit nirgends verschwindendem Nenner, so daß für alle x gleichmäßig

$$|f(x) - R(x)| < \varepsilon$$

ist.

Beweis. Wegen (10) gibt es zu ε rationale Zahlen $X > 1$ und K, so daß für alle $|x| > X - 1$

$$|f(x) - K| < \frac{1}{4}\varepsilon \tag{11}$$

ist. Nach dem Approximationssatz von Weierstraß gibt es ein Polynom $S(x)$ mit reellen Koeffizienten, so daß für $|x| < X + 1$

$$|f(x) - K - S(x)| < \frac{1}{8}\varepsilon$$

ist, und daher ein rationalzahliges Polynom $T(x)$, so daß für die gleichen x

$$|f(x) - K - T(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon \tag{12}$$

ist.

Es werde

$$\alpha(x) = \frac{1}{1 + (X^{-1}x)^{2m}} \qquad (m \text{ ganz}, > 0)$$

gesetzt. Dann ist $\alpha(x)$ eine rationale rationalzahlige Funktion, und bei festem x ist für $m \to \infty$

---

[13]) Eine rationale Funktion heißt hier definit, wenn sie beständig > 0 ist und ihr Nenner nirgends verschwindet.

$$\alpha(x)\begin{cases}\to 0 & \text{bei}\quad |x|>X,\\ =\frac{1}{2} & \text{bei}\quad |x|=X,\\ \to 1 & \text{bei}\quad |x|<X.\end{cases}$$

Aus dem Verhalten von $\alpha(x)$ und aus den Polynomialeigenschaften von $T(x)$ folgt, daß m so groß gewählt werden kann, daß

$$|\alpha(x)T(x)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für alle} \quad |x|\geqq X+\tfrac{1}{2},$$
$$|(\alpha(x)-1)T(x)|<\tfrac{1}{2}\varepsilon \quad \text{für alle} \quad |x|\leqq X-\tfrac{1}{2}$$

ist. Dann ist wegen (11) und (12) sowohl für $|x|\geqq X+\frac{1}{2}$ wie für $|x|\leqq X-\frac{1}{2}$

$$(13)\qquad |f(x)-K-\alpha(x)T(x)|<\varepsilon.$$

Für $X-\frac{1}{2}<|x|<X+\frac{1}{2}$ ist $|T(x)|<\frac{1}{2}\varepsilon$ wegen (11) und (12), also, da stets $|\alpha(x)|\leqq 1$ ist, wiederum wegen (11)

$$(14)\qquad |f(x)-K-\alpha(x)T(x)|<\varepsilon.$$

Durch (13) und (14) ist aber die Behauptung mit $R(x)=K+\alpha(x)T(x)$ bewiesen.

Hilfssatz 2. Es sei $g(x)$ eine definite rationale rationalzahlige Funktion vom Grad $m=\mu n$ (n ganz und >0, μ gerade und $\gtreqless 0$); es seien ferner $0<a<b$ gegebene Zahlen. Dann gibt es eine definite rationale rationalzahlige Funktion $\gamma(x)$, so daß

$$a<\gamma^n(x)g(x)<b$$

ist.

Beweis. Es sei $G(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, $A=\sqrt[n]{a}$, $B=\sqrt[n]{b}$, $\mathsf{H}(x)=(x^2+1)^{\frac{1}{2}\mu}/G(x)$. Dann sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 für $f(x)=\frac{1}{2}(A+B)\,\mathsf{H}(x)$ erfüllt. Daher gibt es für $\varepsilon=\frac{1}{2}(B-A)$ mal der unteren Grenze von $\mathsf{H}(x)$ eine rationale rationalzahlige Funktion $R(x)$ mit nirgends verschwindendem Nenner, so daß

$$\left|R(x)-\frac{1}{2}(A+B)\mathsf{H}(x)\right|<\varepsilon\leqq\frac{1}{2}(B-A)\,\mathsf{H}(x)$$

ist. Hieraus folgt

$$A\,\mathsf{H}(x)<R(x)<B\,\mathsf{H}(x),$$

also insbesondere $R(x)$ definit, und weiter

$$a(x^2+1)^{\frac{1}{2}\mu n}/g(x)<R^n(x)<b(x^2+1)^{\frac{1}{2}\mu n}/g(x),$$

$$a<\left(\frac{R(x)}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}\mu}}\right)^n g(x)<b,$$

wodurch der Hilfssatz mit $\gamma(x)=R(x)/(x^2+1)^{\frac{1}{2}\mu}$ bewiesen ist.

Beweis des Satzes. Da aus dem erwähnten Landauschen Satz unmittelbar folgt, daß jede definite rationale rationalzahlige Funktion sich als Summe von acht Quadraten rationaler rationalzahliger Funktionen mit nirgends verschwindenden Nennern darstellen läßt, ist für jede rationale rationalzahlige Funktion $\mathsf{H}_\lambda(x)$ mit nirgends verschwindendem Nenner und mit $\mathsf{H}_\lambda^2(x) < 1$ die Gleichung

$$\mathsf{H}_\lambda^2(x) + x_2^2(x) + \ldots + x_9^2(x) = 1$$

durch Funktionen $x_2(x), \ldots, x_9(x)$ mit den bei $\mathsf{H}_\lambda(x)$ genannten Eigenschaften lösbar. Für ein solches $\mathsf{H}_\lambda(x)$ folgt daher aus (3) für $\nu = n$, wenn die Zahlen $B = B_n$ und Q dieselbe Bedeutung wie dort haben,

$$B + 2nB\,\mathsf{H}_\lambda^2(x) = \sum_{\varkappa=1}^{Q} \eta_{\varkappa\lambda}^{2n}(x), \tag{15}$$

wobei die $\eta_{\varkappa\lambda}(x)$ rationale rationalzahlige Funktionen mit nirgends verschwindenden Nennern sind. Da weiter für jede definite rationale rationalzahlige Funktion $\mathsf{H}(x) < 1$ die Gleichung

$$\mathsf{H}(x) = \mathsf{H}_1^2(x) + \ldots + \mathsf{H}_8^2(x)$$

durch acht Funktionen $\mathsf{H}_\lambda(x)$ der angegebenen Art lösbar ist, folgt durch Addition der Gleichungen (15) für $\lambda = 1, \ldots, 8$ bei $N = 8Q$, daß für jede Funktion $\mathsf{H}(x)$ der genannten Art eine Gleichung

$$8B + 2nB\,\mathsf{H}(x) = \sum_{\varkappa=1}^{N} \eta_\varkappa^{2n}(x) \tag{16}$$

besteht, wobei die $\eta_\varkappa(x)$ die vorhin bei $\eta_{\varkappa\lambda}(x)$ genannten Eigenschaften haben.

Zu der gegebenen Funktion $g(x)$ gibt es nach Hilfssatz 2 eine definite rationale rationalzahlige Funktion $\gamma(x)$, so daß

$$8B < g(x)\gamma^n(x) < 8B + 2nB$$

ist. Die dann durch

$$\mathsf{H}(x) = \frac{g(x)\gamma^n(x) - 8B}{2nB} \tag{17}$$

definierte Funktion erfüllt daher die an das Bestehen von (16) geknüpften Bedingungen; mithin folgt aus (16) und (17)

$$g(x)\gamma^n(x) = \sum_{\varkappa=1}^{N} \eta_\varkappa^{2n}(x),$$

und hieraus die Richtigkeit des Satzes mit $\xi_\varkappa(x) = \eta_\varkappa^2(x)/\gamma(x)$.

Hagen i. W., 18. 12. 1921.

(Eingegangen am 20. 12. 1921.)

Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme.

I. Teil.

Sätze ersten Grades.

(Über die Axiomensysteme von der kleinsten Satzzahl und den Begriff des idealen Elementes.)

Von

Paul Hertz in Göttingen.

Einleitung.

Wenn ein System von Sätzen als gültig erkannt ist, so ist es oft nicht erforderlich, alle dem Gedächtnis zu überliefern; es genügt, einige von ihnen auszuwählen, aus denen die andern gefolgert werden können. Solche Sätze heißen bekanntlich Axiome. Die Auswahl aber dieser Axiome ist bis zu einem gewissen Grade unserer Willkür überlassen. Man kann jedoch fragen, ob die Eigenschaft eines Satzsystems, mehrere Axiomensysteme zu besitzen mit andern bemerkenswerten Eigenschaften zusammenhängt und ob es systematische Verfahren gibt, gegebenenfalls dasjenige Axiomensystem zu finden, das die geringste Zahl von Sätzen enthält. Einige Überlegungen, die möglicherweise als Vorstufe für die Behandlung dieser oder verwandter Probleme nützlich sein könnten, sollen im folgenden mitgeteilt werden.

In der Tat ist das eigentlich interessierende Problem so verwickelt, daß es zunächst angebracht erscheint, sich mit einer außerordentlich großen Vereinfachung zu begnügen: Wir betrachten hier nur Sätze von einem bestimmten Typus, Sätze, die wir symbolisch schreiben: $(a_1, \ldots, a_n) \rightarrow b$ und die sprachlich ausgedrückt werden durch Formulierungen wie die folgende: Wenn $(a_1, \ldots, a_n)$ zusammen ist, so ist b. Außerdem wird in dem vorliegenden ersten Teil noch eine weitere Vereinfachung eingeführt, indem hier nur Sätze vom Typus $a \rightarrow b$ betrachtet werden; von dieser Einschränkung werden wir uns aber in einem folgenden Teil befreien.

Ferner nehmen wir Regeln an, nach denen aus gewissen Sätzen andere folgen: So soll z. B. die Gültigkeit der Sätze $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ das Bestehen des Satzes $a \rightarrow c$ nach sich ziehen.

Was aber eigentlich mit einem solchen Satz gemeint ist, was das Symbol $\rightarrow$ in der Zeichenverbindung $a \rightarrow b$ oder das Wort „wenn" in der entsprechenden sprachlichen Formulierung bedeutet, braucht hier nicht angegeben zu werden. Es kann an dieser Stelle nicht unsere Aufgabe sein, auszuführen, woher wir die Schlußregeln nehmen, in welchem Sinne derartige Sätze im gewöhnlichen Leben vorkommen und welche Beziehung unsere besondere Fragestellung zu dem Problem nach dem Aufbau einer Wissenschaft besitzen möge. Auch kann hier nicht der Grund aufgezeigt werden, weshalb unsere Betrachtungen bei weitem nicht den Grad der Allgemeinheit erreichen, der notwendig wäre, wenn wir durch sie zum vollen Verständnis des Zusammenhanges mathematischer oder physikalischer Sätze gelangen und nicht nur auf dieses vorbereitet werden sollten. Auf alle diese Fragen soll bei anderer Gelegenheit und an anderer Stelle eingegangen werden [1]). Es genügt vollkommen, wenn wir uns in dieser Arbeit nur an die Schlußregeln halten, nach denen aus gewissen Sätzen andere folgen. Unsere Sätze sind dann von dem formalen, hier angenommenen Standpunkt aus nur Zeichenverbindungen, von denen wir gewisse Mengen betrachten; Mengen nämlich von der Eigenschaft, daß, wenn sie gewisse Sätze enthalten, auch notwendig andere in ihnen vorkommen, die aus jenen nach einer bestimmten Regel gebildet werden.

In der Arbeit ist die Berufung auf die eigentliche geometrische Anschauung nach Möglichkeit vermieden worden. Dadurch kann aber die leichte Erfassung der zu behandelnden Sätze gefährdet sein. Daher soll in dieser Einleitung der Inhalt des im ersten Teile zu Beweisenden zusammengefaßt und durch eine geometrische Darstellung erläutert werden; allerdings ist diese Darstellung in dieser Form nur auf Gesetze vom Typus $a \rightarrow b$ anwendbar, auf die wir uns aber im ersten Teile beschränken [2]).

Die Elemente $a, b, c, \ldots$ werden durch Punkte dargestellt, und die Sätze $a \rightarrow b$ durch einen von a nach b gezogenen Pfeil; es ist ferner darauf zu achten, daß, wenn ein solcher Pfeil von a nach b und ein anderer von b nach c führt, auch ein Pfeil von a nach c führen muß.

---

[1]) Es mag aber bemerkt werden, daß unsere Sätze $a \rightarrow b$ nichts anderes sind als formale „Implikationen" im Sinne von Russell [Whitehead-Russell 1 (1900), S. 15], und daß das im ersten Teile zugrunde gelegte Schlußschema, das von Russell unter Nr. 10, 3, S. 150 aufgeführte Theorem ist, oder auch: Unsere Sätze sind Subsumptionsurteile, unsere Schlüsse Syllogismen nach dem Modus Barbara.

[2]) Ähnliche geometrische Darstellungen in den Arbeiten von Zaremba, Enseignement mathématique (1916), S. 5; G. Pólya, Schweizer Pädagog. Zeitschr. 1919, Hft. 2.

Wenn sich nun nach dieser Regel aus gewissen Sätzen alle andern ergeben, so heißen jene Sätze Axiome, und die ihnen entsprechenden Pfeile sollen ausgezogen werden, während die andern Pfeile nur punktiert gezeichnet werden mögen.

Fig. 1.

Nun geben die Fig. 1 einerseits und Fig. 2a und 2b andererseits Beispiele für den Fall, in dem es nur ein Axiomensystem und für den Fall, in dem es mehrere Axiomensysteme gibt. Die Fig. 3a und 3b lassen erkennen, daß, wenn die Wahl des Axiomensystems nicht eindeutig ist, verschieden viel Axiome zur Darstellung des Satzsystems gebraucht werden können. Insbesondere stellen sie den Fall dar, in dem jedes Element mit jedem durch einen Satz nach beiden Richtungen hin verbunden ist. Wenn das zutrifft, erhält man die geringste Zahl von Axiomen dadurch, daß man die Elemente zyklisch miteinander durch Axiome verbindet. Weiter zeigt sich, daß die Wahl des Axiomensystems dann und nur dann eindeutig

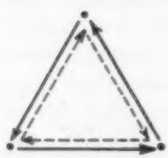

Fig. 2a.

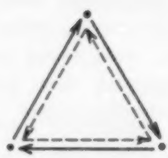

Fig. 2b.

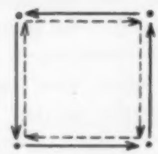

Fig. 3a.

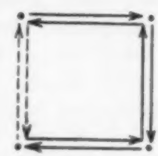

Fig. 3b.

ist, wenn es keine zwei Elemente gibt, die gegenseitig miteinander durch Sätze verbunden sind. Der in der Arbeit hierfür gegebene Beweis kann leicht ins Geometrische übersetzt werden.

Ferner wird es möglich sein, den allgemeinsten auf den Fall zurückzuführen, daß nur *ein* unabhängiges Axiomensystem vorhanden ist, indem man nämlich zunächst gewisse Gruppen gegenseitig miteinander verbundener Elemente durch je *ein* Element ersetzt, daraufhin zu dem reduzierten System das Axiomensystem aufsucht und hernach wieder die fortgelassenen Elemente einführt. Wir haben also nur noch den Fall der Eindeutigkeit zu betrachten.

Nun kann man aber im Falle der Eindeutigkeit die Zahl der Axiome noch weiter reduzieren durch Einführung von *idealen* Elementen. Wenn z. B. jedes von drei Elementen mit jedem von zwei Elementen durch einen Satz verbunden ist, wie das in der Fig. 4a veranschaulicht ist, so werden dazu sechs Sätze gebraucht; durch

Fig. 4a.

Fig. 4b.

Einführung eines idealen Elementes — in 4 b durch einen kleinen Kreis angedeutet — kann man aber die Zahl auf fünf herabsetzen. Ein solches ideales Element hat also nur die Aufgabe, uns zu einer bequemen Darstellung der Sätze zwischen reellen Elementen zu verhelfen; die Sätze zwischen idealen Elementen oder zwischen reellen und idealen Elementen haben keine Bedeutung an sich, sondern nur die aus ihnen abgeleiteten zwischen reellen Elementen bestehenden.

Ideale Elemente werden in allen Wissenschaften, besonders auch in der Physik und Mathematik ständig gebraucht. Zu ihnen zählt z. B. der Kraftbegriff, durch den wir den Zusammenhang zwischen den reellen Elementen: Lage der wirkenden Körper und Bewegung der beeinflußten besser beschreiben können. Vom philosophischen Standpunkt aus ist das ideale Element von Vaihinger in seiner Philosophie des Als-Ob [3]) zum Gegenstand einer gründlichen Untersuchung gemacht worden.

Nun kann man fragen: Wie gelangt man zu der geringsten Zahl von Axiomen, wenn auch ideale Elemente zugelassen werden? Dieses Problem wird hier nicht vollständig gelöst; nur für einen sehr speziellen Fall wird gezeigt, wie man zu dem Axiomensystem von der geringsten Satzzahl unter denjenigen Axiomensystemen gelangt, in denen keine idealen Elemente miteinander verbunden sind.

§ 1.

Problemstellung.

1. (Definition.) Wir betrachten endlich viel Elemente. Unter Satz verstehen wir den Inbegriff eines Komplexes, der nur aus einem einzigen Element bestehen kann und *antecedens* heißt, und eines Elementes, das *succedens* heißt. Wir stellen Sätze durch Formeln dar, wie $(a_1 \dots a_n) \to b_1$ bzw. $a \to b$. Besteht das antecedens nur aus *einem* Element, so heißt der Satz ein Satz ersten Grades.

In diesem Teile werden nur Sätze ersten Grades betrachtet und daher wird unter „Satz" immer ein solcher ersten Grades verstanden. Außerdem wollen wir hier nur Sätze ersten Grades betrachten, deren antecedens und succedens verschieden sind.

2. (Definition.) Ein System von Sätzen

$$\begin{array}{l} \text{I. } a \to b \\ \underline{\text{II. } b \to c} \\ \text{III. } a \to c \end{array}$$

[3]) 2. Auflage, Berlin 1913.

heißt ein Schluß, I der Untersatz, II der Obersatz, III die Konklusion. Untersatz und Obersatz zusammen heißen Prämissen. Von der Konklusion sagen wir auch, sie folge aus den Prämissen.

3. (Definition.) In bezug auf ein System $\mathfrak{T}$ von Sätzen nennen wir Kettenschluß eine einfach geordnete endliche Reihe von Schlüssen, die die Eigenschaft hat, daß jeder nicht zu $\mathfrak{T}$ gehörige Satz in den Schlüssen dieser Reihe mit einer Konklusion eines früheren Satzes übereinstimmt.

4. (Definition). Ein gegebener Satz heißt aus einem gegebenen Satzsystem $\mathfrak{T}$ eigentlich beweisbar, wenn es einen zu $\mathfrak{T}$ gehörigen Kettenschluß gibt, in dem er als Konklusion vorkommt. Dieser Kettenschluß selbst heißt Beweis des Satzes. Ein Satz heißt aus $\mathfrak{T}$ beweisbar, wenn er zu $\mathfrak{T}$ gehört oder eigentlich beweisbar aus $\mathfrak{T}$ ist.

5. (Definition.) Ein System von Sätzen heißt abgeschlossen, wenn jeder in bezug auf das System beweisbare Satz in ihm vorkommt.

6. (Definition.) Zu einem System $\mathfrak{S}$ von Sätzen heißt ein System $\mathfrak{A}$ von Sätzen Axiomensystem, wenn jeder Satz von $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{A}$ beweisbar ist.

7. (Definition.) Ein zu einem System von Sätzen gehöriges Axiomensystem $\mathfrak{A}$ heißt unabhängig, wenn kein Satz von $\mathfrak{A}$ aus andern Sätzen von $\mathfrak{A}$ beweisbar ist.

8. (Lehrsatz.) Ist jeder Satz eines Satzsystems $\mathfrak{C}$ aus einem Satzsystem $\mathfrak{B}$ beweisbar, und ein Satz a aus $\mathfrak{C}$ beweisbar, so ist a aus $\mathfrak{B}$ beweisbar.

9. (Lehrsatz.) Zu jedem abgeschlossenen Satzsystem $\mathfrak{S}$ gibt es mindestens *ein* unabhängiges Axiomensystem.

Beweis. $\mathfrak{S}$ selbst ist ein Axiomensystem. Ist es nicht unabhängig, so muß es mindestens *einen* Satz geben, der aus den andern folgt; diesen lassen wir fort; ist das Restsystem nicht unabhängig, so lassen wir wieder einen Satz fort usw. bis das Verfahren abbricht. Das übrigbleibende System ist nach 8. Axiomensystem und ist unabhängig.

Unsere Aufgabe wird nun sein, einen Überblick zu gewinnen über die Vielfachheit der Möglichkeiten von unabhängigen Axiomensystemen, insbesondere zu untersuchen, wann es nur *ein* Axiomensystem gibt, und wie man systematisch zu solchen von möglichst wenig Sätzen gelangt.

§ 2.

Möglichkeit einer eindeutigen Wahl des Axiomensystems.

10. (Definition.) Wir nennen ein Netz ein System von Elementen nebst den zwischen ihnen bestehenden Sätzen, von der Eigenschaft, daß es zu jedem Paar von Elementen x, y in ihm zwei Sätze $x \to y$, $y \to x$ in ihm gibt.

11. (Lehrsatz.) Die Sätze eines Netzes bilden ein abgeschlossenes Satzsystem.

12. (Lehrsatz.) Wenn eine Anzahl von Elementen so in eine Reihe geordnet ist, daß jedes folgende succedens in einem Satz ist, in dem das vorhergehende antecedens ist, und das erste succedens in einem Satz, in dem das letzte antecedens ist, so sind diese Sätze Axiome eines Netzes und umgekehrt gibt es zu jedem Netz ein Axiomensystem, dessen Sätze sich so anordnen lassen.

13. (Lehrsatz.) Zu den Sätzen eines Netzes, das aus n Elementen besteht, gibt es ein unabhängiges Axiomensystem, das aus n Sätzen besteht, und wenn $n \geqq 3$ ist, unabhängige Axiomensysteme, die aus mehr als n Sätzen bestehen, aber kein unabhängiges Axiomensystem, das aus weniger als aus n Sätzen besteht.

Beweis. Daß es unabhängige Axiomensysteme gibt, die aus n Sätzen bestehen, folgt aus 12. Danach ist ein Axiomensystem für ein Netz mit n Elementen das folgende:

$$a_1 \rightarrow a_2,\ a_2 \rightarrow a_3, \ldots, a_n \rightarrow a_1.$$

Ein unabhängiges Axiomensystem von mehr als n Elementen ($n \geqq 3$) ist das folgende:

$$a_1 \rightarrow a_2,\ a_2 \rightarrow a_3, \ldots, a_{n-1} \rightarrow a_n,$$
$$a_2 \rightarrow a_1,\ a_3 \rightarrow a_2, \ldots, a_n \rightarrow a_{n-1}.$$

Daß es kein unabhängiges Axiomensystem von weniger als n Elementen gibt, erkennt man, indem man bemerkt, daß jedes Element antecedens und succedens eines Axiomes sein muß. Dadurch erhält man mindestens $2n$ Axiome, die im System vorkommen müssen, und von diesen können höchstens je zwei identisch sein.

14. (Lehrsatz.) Wenn zwei Netze ein Element gemein haben, so sind sie Teile ein und desselben Netzes.

15. (Definition.) In Bezug auf ein abgeschlossenes Satzsystem $\mathfrak{S}$ nennen wir Maximalnetz ein Netz, das nicht Teil eines andern in $\mathfrak{S}$ vorkommenden Netzes ist.

16. (Lehrsatz.) Maximalnetze sind einander elementenfremd.

17. (Definition.) Zwei Elemente x und y in einem Satzsystem heißen unzusammenhängend, wenn es möglich ist, alle Elemente in zwei Klassen zu teilen, so daß x und y zu verschiedenen Klassen gehören, und es keinen Satz gibt, der zwei Elemente verschiedener Klassen verbindet.

18. (Definition.) Zu einem Satzsystem gehörige Sätze heißen unzusammenhängend, wenn es möglich ist, die sämtlichen Sätze des Systems in zwei elementenfremde Klassen zu zerlegen, so daß die gegebenen Sätze zu verschiedenen Klassen gehören.

19. (Definition.) Elemente, die nicht unzusammenhängend sind, heißen zusammenhängend.

20. (Definition.) Sätze, die nicht unzusammenhängend sind, heißen zusammenhängend.

21. (Lehrsatz.) Wenn zwei Elemente mit einem dritten zusammenhängend sind, sind sie untereinander zusammenhängend.

Beweis. Es seien a und c zusammenhängend und b und c zusammenhängend. Wären a und b nicht zusammenhängend, so könnten wir sämtliche Elemente in zwei Klassen A und B teilen, so daß a zu A und b zu B gehörte, und es keinen Satz gäbe, in dem ein A und ein B angehöriges Element vorkommt. Gehörte nun c zu A, so wäre c mit b unzusammenhängend im Widerspruch mit der Voraussetzung. Ebenso erhielte man einen Widerspruch, wenn c zu B gehörte.

22. (Lehrsatz.) Wenn zwei Sätze mit einem dritten zusammenhängend sind, so sind sie untereinander zusammenhängend.

Beweis. Es seien die Sätze $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ und die Sätze $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenhängend. Wären $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nicht zusammenhängend, so zerfielen die sämtlichen Sätze des Systems in zwei elementenfremde Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, von denen $\mathfrak{A}$ den Satz $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{B}$ den Satz $\mathfrak{b}$ enthielte. Gehörte nun $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{A}$, so wäre $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{b}$ unzusammenhängend im Widerspruch mit der Voraussetzung. Der entsprechende Widerspruch ergibt sich, wenn man $\mathfrak{c}$ zu $\mathfrak{B}$ gehörig annimmt.

23. (Lehrsatz.) Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Sätze zusammenhängend sind, ist, daß die durch sie bestimmten vier Elemente zusammenhängend sind.

Beweis. 1. Die Sätze $\mathfrak{e} \equiv (a \rightarrow b)$; $\mathfrak{f} \equiv (c \rightarrow d)$ seien zusammenhängend. Daß a, b und c, d zusammenhängend sind, ist sofort klar. Wäre a, c unzusammenhängend, so gäbe es zwei Klassen A und C, zu der a und c gehörten, so daß es keinen Satz gäbe, der ein Element der Klasse A mit einem Element der Klasse C verbindet. Die sämtlichen Sätze zerfielen also in solche, deren Elemente nur A oder C angehören, in zwei elementenfremde Klassen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{e}$ zu der einen und $\mathfrak{f}$ zu der andern gehört, so wären $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ unzusammenhängend, entgegen der Voraussetzung.

2. Es seien a und c zusammenhängend. Wären $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ unzusammenhängend, so gäbe es zwei elementenfremde Klassen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ von Sätzen, zu denen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ gehörten. Die Elemente, die zu den Sätzen von $\mathfrak{E}$ gehören, bilden eine Klasse A, und die Elemente, die zu den Sätzen $\mathfrak{F}$ gehören, bilden eine Klasse C. Da nun jeder Satz entweder zu $\mathfrak{E}$ gehört, also nur Elemente von A enthält, oder zu $\mathfrak{F}$ gehört, also nur Elemente

von C enthält, so gibt es nach unserer Annahme keinen Satz, der ein Element von A und C verbände. Also wären die zu A und C gehörigen Elemente a und c unzusammenhängend, entgegen der Voraussetzung. Daher ist die Annahme falsch, daß $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ unzusammenhängend seien. Ähnlich schließt man, wenn man a und d oder b und c oder b und d als zusammenhängend voraussetzt.

Anmerkung. Sind zwei Elemente, etwa a und c identisch, so sind natürlich auch $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ zusammenhängend. Denn wenn $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ unzusammenhängend wären, so müßte es zwei elementenfremde Satzsysteme $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ geben, zu denen $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ gehörten, aber da $\mathfrak{e} \equiv a \rightarrow b$; $\mathfrak{f} \equiv c \rightarrow d$ wäre, und $a \equiv c$, so wären $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ nicht elementenfremd.

24. (Definition.) In Bezug auf ein Satzsystem $\mathfrak{S}$ heißt *Kette* ein System von zusammenhängenden Sätzen, das keinen Satz enthält, der zu einem Netz von $\mathfrak{S}$ gehört.

Anmerkung. Eine Kette kann aber *Elemente* enthalten, die zu einem Netz gehören.

25. (Lehrsatz.) Zwei Ketten, die ein Element gemeinsam haben, bilden zusammen wieder eine Kette.

Beweis. $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ mögen zusammen das Element x gemeinsam haben. $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{k}''$ seien die zu $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ gehörigen Sätze, die das Element x enthalten. Dann sind nach 23. Anmerkung $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{k}''$ zusammenhängend; also nach 22. jeder Satz von $\mathfrak{K}'$ mit jedem Satz von $\mathfrak{K}''$ oder alle Sätze von $(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'')$ untereinander. Würde nun in $(\mathfrak{K}', \mathfrak{K}'')$ ein zu einem Netz gehöriger Satz vorkommen, so müßte er entweder in $\mathfrak{K}'$ oder $\mathfrak{K}''$ vorkommen, diese würden also nicht beide Ketten sein.

26. (Definition.) In Bezug auf ein Satzsystem $\mathfrak{S}$ heißt Maximalkette eine Kette, die in keiner andern Kette von $\mathfrak{S}$ enthalten ist.

27. (Lehrsatz.) Eine Maximalkette und eine nicht in ihr enthaltene Kette haben kein Element gemein.

Beweis. Folgt aus 25. und 26.

28. (Lehrsatz.) In einem abgeschlossenen System $\mathfrak{S}$ gehört eine Konklusion aus zwei Sätzen einer Maximalkette wieder zur Maximalkette.

Beweis. Wenn $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ zur Maximalkette $\mathfrak{M}$ gehören, so muß auch $a \rightarrow c$ zu $\mathfrak{M}$ gehören. Wäre das nämlich nicht der Fall, so könnte nach 27. $a \rightarrow c$ keine Kette sein, gehörte also nach 24. zu einem Netz. Daher wäre $c \rightarrow a$ ein Satz von $\mathfrak{S}$, und da $b \rightarrow c$ ein Satz von $\mathfrak{S}$ ist, auch $b \rightarrow a$. Dann gehörte $a \rightarrow b$ zu einem Netz, und da dieser Satz in $\mathfrak{M}$ enthalten ist, so wäre $\mathfrak{M}$ nach 24. keine Kette, was gegen die Voraussetzung ist.

29. (Lehrsatz.) Eine Maximalkette in einem abgeschlossenen System ist ein abgeschlossenes System.

Beweis. Folgt aus 5. und 28.

30. (Lehrsatz.) Zwei Maximalketten haben keinen Satz gemein.

Beweis. Folgt aus 27.

31. (Lehrsatz.) Ein Satz in einem abgeschlossenen System gehört nicht zugleich einem Maximalnetz und einer Maximalkette an.

Beweis. Folgt aus 24. und 26.

32. (Lehrsatz.) Jeder Satz in einem abgeschlossenen System gehört entweder einem Maximalnetz oder einer Maximalkette an.

Beweis. Wenn ein $\mathfrak{a}$ keinem Netz angehört, so stellt er für sich nach 24. eine Kette dar. Sei $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der Sätze, die mit $\mathfrak{a}$ zusammenhängend sind und zu keinem Netz gehören, so sind diese Sätze nach 22. untereinander zusammenhängend, also ist $\mathfrak{M}$ eine Kette, und zwar, wie man leicht erkennt, eine Maximalkette. Gehört aber $\mathfrak{a}$ zu einem Netz, so gehört es auch zu einem Maximalnetz.

33. (Lehrsatz.) Die Gesamtheit aller Sätze eines abgeschlossenen Systems bilden zusammen Maximalnetze und Maximalketten, die keinen Satz gemeinsam haben.

34. (Lehrsatz.) Ist ein Satz $\mathfrak{a} \equiv a \rightarrow b$ aus einem System von Sätzen $\mathfrak{T}$ beweisbar, so gibt es eine Reihe von Sätzen $a \rightarrow \alpha_1$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varrho-1} \rightarrow \alpha_\varrho$, $\alpha_\varrho \rightarrow b$, die alle zu $\mathfrak{T}$ gehören.

Beweis. Gehört $\mathfrak{a} \equiv a \rightarrow b$ zu $\mathfrak{T}$, so ist der Satz schon bewiesen. Im andern Falle muß nach 4. $a \rightarrow b$ in einem zu einem Kettenschluß gehörigen Schluß als Konklusion vorkommen, dessen Prämissen $a \rightarrow x$, $x \rightarrow b$ aus $\mathfrak{T}$ beweisbar wären. Diese beiden Sätze gehören wieder zu $\mathfrak{T}$ oder sind Konklusionen früherer Sätze. Im letzten Falle wären $a \rightarrow x'$, $x' \rightarrow x$, $x \rightarrow x''$, $x'' \rightarrow b$ aus $\mathfrak{T}$ beweisbar. Durch Fortsetzung des Verfahrens, das abbrechen muß, erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

35. (Hauptsatz.) **Zu einem abgeschlossenen Satzsystem $\mathfrak{S}$ ohne Netz gibt es ein nur ein unabhängiges Axiomensystem.**

Beweis. Nach 9 gibt es mindestens *ein* unabhängiges Aximensystem. Angenommen es gäbe für $\mathfrak{S}$ zwei unabhängige Axiomensysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, dann müßte in einem Axiomensystem ein Axiom vorkommen, das in dem andern nicht enthalten wäre. Sei $\mathfrak{a} \equiv a \rightarrow b$ ein Axiom von $\mathfrak{A}$, das nicht in $\mathfrak{A}'$ enthalten ist. Dann muß dieser Satz sich aus $\mathfrak{A}'$ beweisen lassen, also muß es nach 34. eine Reihe von mindestens zwei zu $\mathfrak{A}'$ gehörigen Sätzen geben:

$$a \rightarrow \alpha_1,\ \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varrho-1} \rightarrow \alpha_\varrho,\ \alpha_\varrho \rightarrow b.$$

Jeder dieser Sätze muß nun aber wieder durch $\mathfrak{A}$ bewiesen werden können. Daher erhalten wir wieder nach 34. eine Reihe von mindestens zwei Sätzen

$$a \to \beta_1,\ \beta_1 \to \beta_2, \ldots, \beta_{\sigma-1} \to \beta_\sigma,\ \beta_\sigma \to b,$$

die sämtlich zu $\mathfrak{A}$ gehören. Unter diesen Sätzen muß aber $\mathfrak{a}$ enthalten sein, weil sonst das Axiomensystem $\mathfrak{A}$ nicht unabhängig wäre. Daraus folgt, daß die Reihe der obigen Sätze mindestens drei Sätze enthält.

Nun sind drei Fälle möglich:

1. $\mathfrak{a}$ ist $\equiv a \to \beta_1$. Dann wäre $\beta_1 \equiv b$ und $\mathfrak{A}$ enthielte das Netz $b \to \beta_2 \ldots \beta_\sigma \to b$, also enthielte $\mathfrak{S}$ entgegen der Voraussetzung ein Netz.

2. Es ist $\mathfrak{a} \equiv \beta_\sigma \to b$. Dann wäre $\beta_\sigma = a$ und $\mathfrak{A}$ enthielte das Netz $a \to \beta_1 \ldots \beta_{\sigma-1} \to a$, also enthielte $\mathfrak{S}$ entgegen der Voraussetzung ein Netz.

3. Es ist $\mathfrak{a}$ identisch mit einem mittleren Satz $\beta_{\mu-1} \to \beta_\mu$, dann wäre $\beta_{\mu-1} = a$, $\beta_\mu = b$, und $\mathfrak{A}$ enthielte die Netze $a \to \beta_1 \ldots \beta_{\mu-2} \to a$ und $b \to \beta_{\mu+1} \ldots \beta_\sigma \to b$ und $\mathfrak{S}$ enthielte entgegen der Voraussetzung ein Netz.

36. (Definition.) Zu einem gegebenen abgeschlossenen Satzsystem $\mathfrak{S}$ nennen wir reduziertes Satzsystem ein anderes $\mathfrak{S}'$ von folgenden Eigenschaften:

1. Jedem nicht zu einem Netz gehörigen Element a von $\mathfrak{S}$ entspricht ein Element a' von $\mathfrak{S}'$.

2. Allen Elementen $c_1, c_2 \ldots$ eines Maximalnetzes von $\mathfrak{S}$ zusammen entspricht ein einziges Element c' von $\mathfrak{S}'$.

3. Jedem Satz $a \to b$ von $\mathfrak{S}$, wo a und b beide nicht zu einem Netz gehören, entspricht ein Satz $a' \to b'$ in $\mathfrak{S}'$, wo a' und b' die a und b entsprechenden Elemente sind.

4. Allen Sätzen zusammen $a \to \bar{c}_i$ bzw. $\bar{\bar{c}}_j \to b$, wo a bzw. b nicht zu einem Maximalnetz gehört, wo aber alle $\bar{c}_i$ bzw. $\bar{\bar{c}}_j$ zu *ein und demselben* Maximalnetz gehören, entspricht in $\mathfrak{S}'$ ein Satz $a' \to \bar{c}'$ bzw. $\bar{\bar{c}}' \to b$.

Allen Sätzen zusammen $\bar{c}_k \to \bar{\bar{c}}_l$, wo alle $\bar{c}_k$ *ein und demselben* Maximalnetz und alle $\bar{\bar{c}}_l$ *ein und demselben* andern Maximalnetz angehören, entspricht in $\mathfrak{S}'$ ein Satz $\bar{c}' \to \bar{\bar{c}}'$.

5. $\mathfrak{S}'$ enthält keine andern Elemente als die nach 1. und 2. den Elementen von $\mathfrak{S}$ entsprechenden.

6. $\mathfrak{S}'$ enthält keine andern Sätze als die nach 3. und 4. Sätzen von $\mathfrak{S}$ entsprechenden.

37. (Voraussetzung.) Zu jedem abgeschlossenen Satzsystem existiert ein reduziertes.

Anmerkung. Dieser Satz kann natürlich aus einfacheren Voraussetzungen abgeleitet werden. Man kann darauf hinweisen, daß, wenn von einem System die Anzahl der Elemente und ihre Verknüpfungsweisen be-

kannt sind, gesagt werden kann, es existiert. Die Meinung dieser Behauptung wird aber erst klar sein, wenn wir den Begriff Existenz erörtert haben. Man mag etwa den Standpunkt einnehmen, daß den Elementen a von $\mathfrak{S}$ und den Elementen $c_1 \ldots c_n$ zusammen Zeichen a' und c' zugeordnet werden. Diese Zeichen aber existieren in unserm Geist Oder man sage, der Inbegriff der Dinge $c_1 \ldots c_n$ ist wieder ein Ding. Schließlich kann man auch das reduzierte System als ein Mittel ansehen, die Gesetze des nichtreduzierten darzustellen.

Wir haben unter der vorigen Nummer das reduzierte System in hypothetischer Form eingeführt und gesagt, ein zu dem gegebenen System in gewissen Beziehungen stehendes nennen wir ein reduziertes. Wir hätten auch anders verfahren und etwa sagen können: Wir können an Stelle jedes Elementes a ein Element a' und an Stelle der Elemente $c_1, c_2, \ldots, c_n$ eines Netzes zusammen ein Element c' setzen usw. (die Forderungen 5. und 6. sind dann entbehrlich). Das erhaltene System nennen wir ein reduziertes System. Dieser Satz hätte dann nicht sowohl die Form einer Definition als einer Aussage.

Wir hatten oben erklärt (1.), nur Sätze von der Form $a \rightarrow b$ betrachten zu wollen. Das scheint mit der jetzt vollzogenen Wendung im Widerspruch zu stehen. Aber das reduzierte System an sich unterliegt denselben Verknüpfungen wie das ursprüngliche und dient nur dazu, gewisse Sätze über jenes bequemer abzuleiten.

38. (Lehrsatz.) Ein zu einem abgeschlossenen System $\mathfrak{S}$ gehöriges reduziertes System $\mathfrak{S}'$ enthält kein Netz.

Beweis. Enthielte $\mathfrak{S}'$ ein Netz, so müßte es in ihm zwei Elemente a', b' geben, so daß $a' \rightarrow b'$, $b' \rightarrow a'$ in $\mathfrak{S}'$ vorkäme. Diesen Sätzen entsprächen in $\mathfrak{S}$ nach 36. zwei Sätze $a_1 \rightarrow b_1$, $b_2 \rightarrow a_2$. Da aber b_1 und b_2 dasselbe Element b' entspräche, so müßten sie nach 36 zu demselben Maximalnetz gehören, also müßte $b_1 \rightarrow b_2$ in $\mathfrak{S}$ vorkommen. Ebenso müßten a_1, a_2 zu einem Maximalnetz gehören. also $a_2 \rightarrow a_1$ in $\mathfrak{S}$ vorkommen. Wegen seiner Abgeschlossenheit enthielte $\mathfrak{S}$ dann $b_1 \rightarrow a_1$, d. h. a_1 und b_1 gehörten zu einem Maximalnetz. Dann könnten ihnen aber entgegen der Voraussetzung nicht verschiedene Elemente in $\mathfrak{S}'$ entsprechen.

39. (Lehrsatz.) Das zu einem abgeschlossenen System gehörige reduzierte System $\mathfrak{S}'$ ist in bezug auf $\mathfrak{S}'$ eine Maximalkette oder zerfällt in mehrere Maximalketten, die kein Element und keinen Satz gemeinsam haben.

Beweis. Folgt aus 26. und 38.

40. (Lehrsatz.) Ein zu einem abgeschlossenen System $\mathfrak{S}$ gehöriges reduziertes System $\mathfrak{S}'$ ist abgeschlossen.

Beweis. Seien $\mathfrak{e}' \equiv a' \to b'$ und $\mathfrak{f}' \equiv b' \to c'$ zwei in $\mathfrak{S}'$ enthaltene Sätze, so ist nach 38. $a' \not\equiv c'$. Dann muß es nach 36. in $\mathfrak{S}$ zwei $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{f}'$ entsprechende Sätze geben: $a_1 \to b_1$, $b_2 \to c_2$. Entweder wäre nun $b_1 \equiv b_2$. Dann würde $a_1 \to c_2$ ein Satz von $\mathfrak{S}$ sein. Oder b_1 wäre nicht $\equiv b_2$. Dann gehörten b_1 und b_2 nach 36. zu einem Maximalnetz und daher wäre $b_1 \to b_2$ in $\mathfrak{S}$ enthalten, also wieder $a_1 \to c_2$ ein Satz von $\mathfrak{S}$. Da nun $a' \not\equiv c'$ ist, so gehören a_1 und c_2 nicht ein und demselben Maximalnetz an und nach 36 ist $a' \to c'$ ein Satz von $\mathfrak{S}'$.

41. (Lehrsatz.) Zu einem reduzierten System gibt es ein und nur *ein* unabhängiges Axiomensystem.

Beweis. Folgt aus 35. und 38.

42. (Lehrsatz.) Man erhält zu einem abgeschlossenen System $\mathfrak{S}$ ein Axiomensystem $\mathfrak{A}$ auf folgende Weise: Man stellt ein Axiomensystem $\mathfrak{A}'$ von $\mathfrak{S}'$ auf, sucht ferner zu jedem Satz von $\mathfrak{A}'$ einen in $\mathfrak{S}$ entsprechenden Satz (36) und fügt für jedes in $\mathfrak{S}$ enthaltene Maximalnetz ein Axiomensystem hinzu.

Beweis. Sei $\mathfrak{e} \equiv a \to b$ ein Satz von $\mathfrak{S}$; es ist zu zeigen, daß er aus $\mathfrak{A}$ beweisbar ist. Wenn $\mathfrak{e}$ Satz eines Maximalnetzes ist, so ist der Beweis schon erledigt. Gehöre also $\mathfrak{e}$ nicht einem Maximalnetz an. Dann gibt es nach 36 einen zugehörigen Satz $\mathfrak{e}' \equiv a' \to b'$ in $\mathfrak{S}'$. Dieser muß durch Axiome von $\mathfrak{A}'$ bewiesen werden können. Es muß also nach 34. eine Reihe zu $\mathfrak{A}'$ gehöriger Sätze geben

$$a' \to a_1',\ a_1' \to a_2',\ \ldots,\ a_{\varrho-1}' \to a_\varrho',\ a_\varrho' \to b'.$$

Die entsprechenden Sätze in $\mathfrak{A}$ seien

$$\bar{a} \to \bar{a}_1,\ \bar{\bar{a}}_1 \to \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{\bar{a}}_{\varrho-1} \to \bar{a}_\varrho,\ \bar{\bar{a}} \to \bar{b}.$$

Nun sind hier entweder zwei aufeinander folgende Elemente $\bar{a}_i$, $\bar{\bar{a}}_i$ miteinander identisch, oder gehören, da ihnen dasselbe a_i' entspricht, zu demselben Maximalnetz, so daß $\bar{a}_i \to \bar{\bar{a}}_i$ aus $\mathfrak{A}$ beweisbar ist. Ferner sind a und $\bar{a}$ bzw. b und $\bar{b}$ identisch oder gehören demselben Maximalnetz an. Also gibt es ein System von Sätzen

$$a \to a_1,\ a_1 \to a_2,\ \ldots,\ a_\varrho \to b$$

die zu $\mathfrak{A}$ gehören; womit der Beweis erbracht ist.

43. (Lehrsatz.) Man erhält zu einem abgeschlossenen System $\mathfrak{S}$ ein *unabhängiges* Axiomensystem $\mathfrak{A}$ auf folgende Weise: Man stellt das unabhängige Axiomensystem (41.) von $\mathfrak{S}'$ auf, sucht ferner zu jedem Satz von $\mathfrak{A}'$ einen in $\mathfrak{S}$ entsprechenden Satz und fügt für jedes in $\mathfrak{S}$ enthaltene Maximalnetz ein unabhängiges Axiomensystem hinzu.

Beweis. Auf diese Weise erhält man nach 42. ein Axiomensystem. Angenommen, es sei nicht unabhängig und zwar sei $\mathfrak{e} \equiv a \to b$ ein Satz

von $\mathfrak{A}$, der sich aus den andern Axiomen beweisen ließe. Dann kann $\mathfrak{e}$ entweder zu einem Maximalnetz von $\mathfrak{S}$ gehören oder nicht.

a) Gehörte $\mathfrak{e}$ zu einem Maximalnetz von $\mathfrak{S}$, so gäbe es nach 34. eine Reihe von zwei oder mehr Sätzen

$$a \rightarrow \alpha_1, \alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho \rightarrow b,$$

die zu $\mathfrak{A}$ gehörten und von $\mathfrak{e}$ verschieden wären. Von diesen können nach Voraussetzung nicht alle demselben Maximalnetz wie $\mathfrak{e}$ angehören, also nicht alle untereinander demselben Maximalnetz, also muß in der Reihe ein Satz enthalten sein, der zu keinem Maximalnetz gehört. Es sei das der Satz $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$.

Andererseits sind, weil $a \rightarrow b$ zu einem Netz gehörte, $b \rightarrow a$, $a \rightarrow \alpha_i$ Sätze von $\mathfrak{S}$ also auch $\alpha_{i+1} \rightarrow \alpha_i$ und daher gehörte $\alpha_i \rightarrow \alpha_{i+1}$ doch zu einem Netz.

b) Gehörte $\mathfrak{e}$ zu keinem Maximalnetz, so gäbe es wieder nach 34. eine Reihe $\mathfrak{R}$ von zwei oder mehr Sätzen $a \rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \rightarrow b$, die zu $\mathfrak{A}$ gehörten, von $\mathfrak{e} = a \rightarrow b$ verschieden wären und nicht sämtlich zu einem Maximalnetz gehören könnten. Sei $\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1}$ ein solcher Satz, der nicht zu einem Maximalnetz gehörte und von $a \rightarrow b$ verschieden ist. Denjenigen der Sätze $\mathfrak{R}$, die zu keinem Maximalnetz gehören, entsprechen aber zu $\mathfrak{A}'$ gehörigen Sätzen in $\mathfrak{S}'$, und diese bilden eine Reihe $\mathfrak{R}'$ $a' \rightarrow \beta_1', \beta_1' \rightarrow \beta_2', \ldots, \beta_\sigma' \rightarrow b'$, die die Eigenschaft haben, daß das antecedens jedes Satzes (außer dem des ersten) mit dem succedens des vorhergehenden übereinstimmt. Ferner enthält die Reihe $\mathfrak{R}'$ den $\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1}$ entsprechenden Satz, der von $a' \rightarrow b'$ verschieden ist (weil einem Satz von $\mathfrak{A}'$ nur *einer* von $\mathfrak{A}$ entspricht), also mindestens zwei Sätze. Wäre aber einer der Sätze $\mathfrak{R}' = a' \rightarrow b'$, so enthielte die Reihe ein Netz im Widerspruch mit 38., wenn aber $a' \rightarrow b'$ in $\mathfrak{R}'$ nicht vorkommt, so wäre entgegen der Voraussetzung das System $\mathfrak{A}'$ nicht unabhängig.

45. (Lehrsatz.) Zu einem gegebenen abgeschlossenen Satzsystem gibt es keine andern unabhängigen Axiomensysteme als solche, die auf die in der vorigen Nummer beschriebene Weise gefunden werden.

Beweis. Sei $\mathfrak{A}$ ein unabhängiges Axiomensystem. Es ist zu zeigen:

1. Diejenigen Sätze von $\mathfrak{A}$, die zu einem Maximalnetz gehören, bilden für dieses ein unabhängiges Axiomensystem.

2. Ist $\mathfrak{A}^*$ der Inbegriff derjenigen Sätze von $\mathfrak{A}$, die nicht zu einem Maximalnetz gehören und $\mathfrak{A}^{*\prime}$ das $\mathfrak{A}^*$ in $\mathfrak{S}'$ entsprechende System, so ist $\mathfrak{A}^{*\prime}$ das unabhängige Axiomensystem von $\mathfrak{S}'$.

3. $\mathfrak{A}$ enthält von mehreren demselben Satz in $\mathfrak{S}'$ entsprechenden Sätzen nur *einen*.

ad 1. Es genügt zu zeigen, daß das System $\overline{\mathfrak{A}}$ derjenigen Sätze von $\mathfrak{A}$, die zu einem Maximalnetz $\mathfrak{M}$ gehören, ein Axiomensystem für $\mathfrak{M}$ ist.

Wäre das nicht der Fall, und sei $a \to b$ ein zu $\mathfrak{M}$ gehöriger Satz, der nicht aus $\overline{\mathfrak{A}}$ beweisbar wäre, dann gäbe es nach 34. eine Reihe von Sätzen $a \to \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \to b$, die zu $\mathfrak{A}$ gehörten, und von denen mindestens einer $\alpha_i \to \alpha_{i+1}$ nicht zu $\overline{\mathfrak{A}}$, also auch nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörte.

Es müßten dann aber $\alpha_{i+1} \to b$, $b \to a$ zu $\mathfrak{S}$ gehören, also auch $\alpha_{i+1} \to \alpha_i$, d. h. α_i und α_{i+1} gehörten zu einem Maximalnetz und daher auch zu $\mathfrak{M}$, entgegen der Annahme.

ad 2. Es ist zu zeigen: a) daß jeder Satz von $\mathfrak{S}'$ sich durch $\mathfrak{A}^{*'}$ beweisen läßt, b) daß die Sätze von $\mathfrak{A}^{*'}$ unabhängig sind.

a) Angenommen, der Satz $\mathfrak{c}' = a' \to b'$ ließe sich nicht durch $\mathfrak{A}^{*'}$ beweisen. Nun läßt sich aber der ihm entsprechende Satz $\mathfrak{c} = a \to b$ aus $\mathfrak{A}$ beweisen. Also gibt es zu $\mathfrak{A}$ gehörige Sätze $a \to \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \to b$. Indem man zu denjenigen unter ihnen, die nicht zu einem Maximalnetz gehören, die entsprechenden Sätze in $\mathfrak{S}'$ aufsucht, erhält man entgegen der Annahme eine Reihe zu $\mathfrak{A}^{*'}$ gehöriger Sätze:

$$a' \to \beta_1' \ldots \beta_\sigma' \to b'.$$

b) Gäbe es in $\mathfrak{A}^{*'}$ einen Satz $a' \to b'$, der sich aus andern Sätzen von $\mathfrak{A}^{*'}$ beweisen ließe, so hätte man die zu $\mathfrak{A}^{*'}$ gehörige Reihe von mindestens zwei Sätzen $a' \to \beta_1' \ldots \beta_\sigma' \to b'$. Die entsprechende Reihe von mindestens zwei Sätzen in $\mathfrak{S}$ sei

$$\bar{a} \to \bar{\alpha}_1, \bar{\bar{\alpha}}_2 \to \bar{\alpha}_3, \ldots, \bar{\bar{\alpha}}_\sigma \to \bar{b}.$$

Wenn aber zwei anstoßende Elemente wie $\bar{\alpha}_1, \bar{\bar{\alpha}}_2$ verschieden sind, so gehören sie zu einem Netz, nach 1 gibt es also eine a und b verbindende Reihe zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Sätze. Käme in ihr $a \to b$ vor, so gehörten a, b zu einem Netz, was nicht sein kann, da $a \to b$ ein Satz $a' \to b'$ in $\mathfrak{S}$ entspricht. $a \to b$, das zu $\mathfrak{A}$ gehört, wäre also aus andern Sätzen von $\mathfrak{A}$ zu beweisen, und $\mathfrak{A}$ wäre nicht unabhängig.

ad 3. $\mathfrak{A}$ kann nicht zwei Sätze enthalten, die demselben Satz von $\mathfrak{S}'$ entsprechen. Seien $a_1 \to b_1$ und $a_2 \to b_2$ zwei solche Sätze, so müßten entweder a_1 und a_2 identisch sein und b_1 und b_2 demselben Netz angehören, oder umgekehrt, oder a_1 und a_2 einerseits und b_1 und b_2 andererseits demselben Netz angehören.

Betrachten wir nun z. B. den letzten Fall. Nach 1. müßte es dann eine Reihe von Sätzen geben, die zu $\mathfrak{A}$ gehören, und zu demselben Maximalnetz, und daher verschieden von $a_1 \to b_1$ sind, und durch die sich $a_1 \to a_2$ beweisen ließe, eine Reihe, die wir $a_1 \to \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \to a_2$ nennen. Ebenso

gäbe es eine Reihe: $b_2 \rightarrow \beta_1 \ldots \beta_\sigma \rightarrow b_1$, in der $a_1 \rightarrow b_1$ nicht vorkommt. Man könnte also $a_1 \rightarrow b_1$ durch die Reihe beweisen:

$$a_1 \rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \rightarrow a_2, \quad a_2 \rightarrow b_2, \quad b_2 \rightarrow \beta_1 \ldots \beta_\sigma \rightarrow b_1,$$

in der $a_1 \rightarrow b_1$ nicht vorkommen kann, d. h. $\mathfrak{A}$ wäre nicht unabhängig.

45. (Definition.) Unter einem Zuge verstehen wir ein System von Elementen, und ein zwischen ihnen bestehendes abgeschlossenes System von Sätzen von der Eigenschaft, daß jedes Paar von Elementen durch einen und nur durch *einen* Satz verbunden ist.

46. (Lehrsatz.) In einem Zug ist kein Netz enthalten.

Beweis folgt aus 10 und 45.

47. (Lehrsatz und Definition.) In einem Zug gibt es ein und nur *ein* Element, das succedens von keinem andern ist — wir nennen es das höchste — und ein und nur *ein* Element, das antecedens von keinem andern ist — wir nennen es das niedrigste.

Beweis. Wir gehen von einem beliebigen Elemente aus; gibt es dazu ein antecedens, so suchen wir dieses auf, dann dasjenige, das sein antecedens ist usw. Da man wegen der Abgeschlossenheit des Satzsystems nie auf ein schon vorgekommenes Element wieder treffen kann, so muß die Reihe abbrechen, also ein höchstes Element vorhanden sein. Ebenso erkennt man die Existenz eines niedrigsten Elementes. Aus der Definition 45. ist auch klar, daß es nur *ein* höchstes und *ein* niedrigstes Element geben kann.

48. (Lehrsatz und Definition.) Die Elemente eines Zuges lassen sich auf eine und nur *eine* Weise so anordnen, daß jedes mit Ausnahme des niedrigsten antecedens zu dem folgenden, und jedes mit Ausnahme des höchsten succedens zu dem vorhergehenden ist, und daß zu zwei aufeinander folgenden Elementen keines vorhanden ist, das antecedens des einen und succedens des andern ist. Wir nennen diese Anordnung die natürliche.

Beweis. Als erstes Element wähle man das höchste, als folgendes das höchste des Restes usw. Ist nun z. B. x ein Element und y das folgende, so muß $x \rightarrow y$ ein Satz des Zuges sein; denn wäre $y \rightarrow x$ ein Satz des Zuges, so hätten wir, da damals, als wir x auswählten, auch y noch verfügbar war, einen Fehler begangen. Ferner sieht man, daß, wenn $x \rightarrow z$ ein Satz des Zuges ist, wo $z \neq y$ ist, $z \rightarrow y$ nicht zum Zuge gehört. Man zeigt auch leicht, daß diese Anordnung die einzige ist, die die geforderte Eigenschaft besitzt.

49. (Lehrsatz.) Man erhält zu einem Zuge ein unabhängiges Axiomensystem und das einzige, indem man die Elemente in natürlicher Reihenfolge anordnet und als Axiome alle Sätze aufstellt, die zwei aufeinander folgende Elemente verbinden.

Beweis. Daß diese Sätze ein Axiomensystem bilden, ist sofort klar. Daß sie unabhängig sind, folgt nach 34. daraus, daß es zu zwei aufeinderfolgenden Elementen keins gibt, das succedens des höheren und antecedens des niedrigeren ist. Daß es kein anderes unabhängiges Axiomensystem gibt, folgt aus 35. und 46.

50. (Definition.) Unter einem Maximalzug in einem abgeschlossenen Satzsystem verstehen wir einen Zug, der in keinem andern enthalten ist.

51. (Lehrsatz). Jeder Satz in einem abgeschlossenen System gehört mindestens zu einem Maximalzug.

52. (Lehrsatz.) Man erhält das unabhängige Axiomensystem eines abgeschlossenen Satzsystems ohne Netz, indem man die Axiomensysteme zu allen Maximalzügen aufstellt (dabei können unter Umständen Sätze als Axiome von mehreren Maximalzügen auftreten).

Beweis. Nennen wir $\mathfrak{A}$ das System der Sätze, das aus allen Axiomensystemen aller Maximalzüge besteht.

1. Sei $a \rightarrow b$ ein Satz von $\mathfrak{S}$. Er gehört nach 51. zu einem Maximalzug, ist also aus $\mathfrak{A}$ beweisbar.

2. Sei $a \rightarrow b$ ein Satz von $\mathfrak{A}$. Es ist zu zeigen, daß er nicht aus andern Sätzen von $\mathfrak{A}$ bewiesen werden kann. Sei das doch der Fall. Da $a \rightarrow b$ zu $\mathfrak{A}$ gehört, so muß es einen Maximalzug Z geben, in dem b das auf a folgende Element ist. Wäre aber $a \rightarrow b$ aus anderen Sätzen von $\mathfrak{A}$ beweisbar, so gäbe es eine Reihe von Sätzen, die von $a \rightarrow b$ verschieden wären und zu $\mathfrak{A}$ gehörten:

$$a \rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \rightarrow b.$$

Diese Sätze können nicht zu Z gehören, weil es kein Element x von Z geben soll, für das $a \rightarrow x$, $x \rightarrow b$ gilt. Andererseits erhält man, wenn man sie zu Z hinzufügt, wieder einen Zug. Denn für ein zu Z gehöriges Element x gilt entweder $x \rightarrow a$ und dann auch $x \rightarrow \alpha_i$, oder $b \rightarrow x$ und dann $\alpha_i \rightarrow x$. Also wäre Z im Widerspruch mit der Voraussetzung kein Maximalzug.

§ 3.

Ideale Elemente.

53. (Definition.) Ist $\mathfrak{S}$ der Inbegriff von Elementen und einem abgeschlossenen System zwischen ihnen bestehender Sätze, so nennen wir ein erweitertes System $\hat{\mathfrak{S}}$ einen Inbegriff von Elementen und einem abgeschlossenen System zwischen ihnen bestehender Sätze, wenn folgendes gilt:

1. Jedem Element a von $\mathfrak{S}$ entspricht ein Element $\hat{a}$ von $\hat{\mathfrak{S}}$. Solche Elemente nennen wir *reelle* Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$ und die nicht reellen Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$ *ideale* Elemente.

2. Jedem Satz $a \to b$ von $\mathfrak{S}$ entspricht ein Satz $\hat{a} \to \hat{b}$ von $\hat{\mathfrak{S}}$ zwischen den entsprechenden reellen Elementen in $\hat{\mathfrak{S}}$.

3. Jedem Satz von $\hat{\mathfrak{S}}$ zwischen reellen Elementen entspricht ein Satz in $\mathfrak{S}$ zwischen den entsprechenden Elementen.

Anm. 1. Sätzen in $\hat{\mathfrak{S}}$ zwischen idealen Elementen oder zwischen einem reellen und einem idealen Elemente entsprechen keine Sätze in $\mathfrak{S}$.

Anm. 2. Wegen der Eigenschaft 3. gewinnen wir durch die Betrachtung des erweiterten Systems zugleich einen Überblick über die Sätze des ursprünglichen Systems.

Anm. 3. Der Bequemlichkeit halber werden wir in Zukunft das erweiterte System ansehen als hervorgegangen aus den Elementen des ursprünglichen, die reelle Elemente des erweiterten werden, und aus hinzugefügten idealen Elementen.

Anm. 4. Das erweiterte System kann ein unabhängiges Axiomensystem besitzen, das aus weniger Sätzen besteht als das ursprüngliche.

Besteht z. B. das ursprüngliche System aus den Elementen a', a'', b', b'', b''' und den zwischen ihnen bestehenden sechs Sätzen

$$a' \to b',$$
$$a' \to b'',$$
$$a' \to b''',$$
$$a'' \to b',$$
$$a'' \to b'',$$
$$a'' \to b''',$$

so gibt es dazu ein erweitertes System von den 5 Sätzen:

$$a' \to \mathfrak{a},$$
$$a'' \to \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{a} \to b',$$
$$\mathfrak{a} \to b'',$$
$$\mathfrak{a} \to b''',$$

wo $\mathfrak{a}$ ein ideales Element bedeutet.

Anm. 5. Durch Einführung der idealen Elemente umgehen wir den Gebrauch des Wortes „oder“ im antecedens zusammen mit dem Gebrauch des Wortes „und“ im succedens.

54. (Definition.) In einem kein Netz enthaltenden abgeschlossenen Satzsystem $\mathfrak{S}$ nennen wir *Gruppenpaar* ein Paar zweier elementenfremder Gruppen A und B von Elementen von der Eigenschaft, daß es zwischen jedem Element von A als antecedens und von jedem Element von B als

succedens einen Satz gibt, der zu dem unabhängigen Axiomensystem (35). gehört. A heißt die antecedens-Gruppe, B die succedens-Gruppe.

Anm. Dafür, daß A und B Gruppenpaare sind, ist also nicht ausreichend, daß es zwischen jedem Element von A als antecedens und B als succedens einen Satz gibt.

55. (Definition.) Ein Maximalgruppenpaar ist ein Gruppenpaar A, B, wenn es außer den Elementen von A keines gibt, zwischen dem als antecedens und jedem Element von B ein Axiom besteht, und außer den Elementen von B keines gibt, zwischen dem als succedens und jedem Element von A ein Axiom besteht.

56. (Lehrsatz.) Jedes Axiom kommt mindestens in *einem* Maximalgruppenpaar vor.

57. (Definition.) Ein kleines Maximalgruppenpaar ist ein solches, das entweder in der antecedens-Gruppe oder in der succedens-Gruppe nur ein Element enthält; ein mittleres Maximalgruppenpaar ist ein solches, das in der antecedens-Gruppe und in der succedens-Gruppe zwei Elemente enthält; ein großes Maximalgruppenpaar ist ein solches, das nicht ein kleines und nicht ein mittleres ist.

58. (Lehrsatz.) Zwischen zwei Elementen einer antecedens-Gruppe und zwischen zwei Elementen einer succedens-Gruppe eines abgeschlossenen Satzsystems $\mathfrak{S}$ ohne Netz gibt es keine Sätze.

Beweis. Sei z. B. $a_i \rightarrow a_k$ ein Satz, der zwischen Elementen von A besteht, so gibt es eine zum Axiomensystem gehörige Reihe:

$$a_i \rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \rightarrow a_k.$$

Andererseits gibt es für $\mathfrak{S}$ Axiome $a_i \rightarrow b_l$, $a_k \rightarrow b_l$, wo b_l ein Element von B ist. Ich kann also $a_i \rightarrow b_l$ ersetzen durch eine Reihe von Axiomen

$$a_i \rightarrow \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \rightarrow a_k,\ a_k \rightarrow b_l.$$

Da die Axiome unabhängig voneinander sein sollen, so müßte $a_i \rightarrow b_l$ in dieser Reihe vorkommen, d. h. gegen die Voraussetzung $\mathfrak{S}$ ein Netz enthalten.

59. (Definition.) Ein Gruppenpaar A, B heißt abgeschlossen, wenn es außer den Elementen von A keines gibt, zwischen dem als antecedens und einem Element von B als succedens ein Axiom besteht, und außer den Elementen von B keines gibt, zwischen dem als succedens und einem Element von A ein Axiom besteht.

60. (Lehrsatz.) Jedes abgeschlossene Gruppenpaar ist ein Maximalgruppenpaar.

61. (Lehrsatz.) Die antecedens-Gruppen und die succedens-Gruppen zweier abgeschlossener Gruppenpaare sind elementenfremd.

62. (Definition.) Ein abgeschlossenes Satzsystem heißt einfach, wenn es kein Netz enthält, und jedes seiner Maximalgruppenpaare abgeschlossen ist.

63. (Lehrsatz.) In einem einfachen Satzsystem gehört jedes Axiom zu einem und nur *einem* Maximalgruppenpaar.

64. (Lehrsatz.) Gibt es in einem einfachen Satzsystem $\mathfrak{S}$ einen Satz $x \to b_i$, wo b_i zur succedens-Gruppe eines Maximalgruppenpaares gehört, aber x nicht zur entsprechenden antecedens-Gruppe A, so gibt es in $\mathfrak{S}$ einen Satz $x \to a_l$, wo a_l zu A gehört. Ebenso: Gibt es in $\mathfrak{S}$ einen Satz $a_k \to y$, wo a_k zu A gehört, aber y nicht zu B, so gibt es in $\mathfrak{S}$ einen Satz $b_m \to y$, wo b_m zu B gehört.

Beweis. Nach 34. gibt es im ersten Falle eine aus den Axiomen von $\mathfrak{S}$ bestehende Reihe von mindestens zwei Sätzen

$$x \to \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \to b_i.$$

Da nun A, B ein abgeschlossenes Gruppenpaar ist, muß α_ϱ zu A gehören. Daraus folgt der erste Teil des Satzes; ebenso der zweite.

65. (Definition.) Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches Satzsystem und $\hat{\mathfrak{S}}$ ein erweitertes System dazu, so heißt ein unabhängiges Axiomensystem $\hat{\mathfrak{A}}$ von $\hat{\mathfrak{S}}$, in dem nicht zwei ideale Elemente durch Axiome verbunden sind, Axiomensystem ersten Grades zu $\mathfrak{S}$.

66. (Lehrsatz.) Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches System und $\mathfrak{A}$ ein Axiomensystem ersten Grades von $\mathfrak{S}$, und sind a, b Elemente einer antecedens-Gruppe und einer succedens-Gruppe eines Maximalgruppenpaares von $\mathfrak{S}$ (es gibt ein Axiom $a \to b$ von $\mathfrak{S}$), so kommt in $\hat{\mathfrak{A}}$ entweder ein Axiom $\hat{a} \to \hat{b}$ vor oder ein Axiomenpaar $\hat{a} \to \mathrm{a}$, $\mathrm{a} \to \hat{b}$, wo a ein ideales Element ist.

Beweis. Sei $\hat{\mathfrak{S}}$ das erweiterte System, zu dem $\hat{\mathfrak{A}}$ gehört. Nach 53_2 gibt es in $\hat{\mathfrak{S}}$ einen Satz $\hat{a} \to \hat{b}$. Gehörte dieser Satz nun nicht zu $\hat{\mathfrak{A}}$, so gäbe es in $\hat{\mathfrak{A}}$ eine Reihe $\mathfrak{R}$

$$\hat{a} \to \hat{\alpha}_1, \; \hat{\alpha}_1 \to \hat{\alpha}_2 \ldots \hat{\alpha}_\varrho \to \hat{b}$$

von mindestens zwei Axiomen, wo $\hat{\alpha}_1 \not\equiv b$ wäre. Wenn nun $\hat{\alpha}_1$ reell wäre, so müßte nach 53_3 dem Satz $\hat{a} \to \hat{\alpha}_1$ ein Satz $a \to \alpha_1$ in $\mathfrak{S}$ entsprechen, also nach 64. ein Satz $b_m \to \alpha_1$ in $\mathfrak{S}$ vorhanden sein, wo b_m zu B gehörte. $\mathfrak{S}$ enthielte also die beiden Sätze $b_m \to \alpha_1$, $\alpha_1 \to b$. Wenn nun $b_m \equiv b$ wäre, so enthielte $\mathfrak{S}$ ein Netz, und wenn $b_m \not\equiv b$ wäre, so bedeutete das einen Widerspruch gegen 58. Beides ist unmöglich und α_1 muß ideal sein.

Würde nun $\mathfrak{R}$ mehr als zwei Sätze enthalten, so müßte, weil $\hat{\mathfrak{A}}$ vom ersten Grade sein soll, $\hat{\alpha}_2$ reell sein. Es würde also in $\mathfrak{S}$ ein Satz enthalten sein $a \to \alpha_2$, und daher nach 64. auch ein Satz $b_n \to \alpha_2$, wo b_n zu B gehörte, was wieder mit $\alpha_2 \to b$ nicht zusammenbestehen könnte. Also enthält die Reihe $\mathfrak{R}$ kein weiteres Element.

67. (Definition.) Sind A, B zwei disjunkte Komplexe von Elementen, so nennen wir Verbindungssystem ein System aus diesen Elementen und noch anderen Elementen $\mathfrak{v}$, die wir als Verbindungselemente bezeichnen und von Sätzen zwischen den Elementen $\mathfrak{v}$, den Elementen a von A und den Elementen b von B von folgenden Eigenschaften:

1. Ein Element $\mathfrak{v}$ ist nur antecedens zu einem Element von B und nur succedens zu einem Element von A.

2. Zu jedem Paar a, b gibt es einen Satz $a_i \rightarrow b_k$ oder ein Satzpaar $a_i \rightarrow \mathfrak{v}_{ik}$, $\mathfrak{v}_{ik} \rightarrow b_k$.

68. (Definition.) Ein Verbindungssystem ohne Verbindungselemente nennen wir ein disparates Verbindungssystem.

69. (Definition.) Besitzt ein Verbindungssystem nur ein Verbindungselement und ist dieses antecedens zu allen Elementen von B und succedens zu allen Elementen von A und enthält das Verbindungssystem weiter keine Sätze, so nennen wir es ein zentriertes Verbindungssystem.

70. (Lehrsatz.) Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches Satzsystem, $\hat{\mathfrak{A}}$ ein zugehöriges Axiomensystem ersten Grades, ferner A, B ein Maximalgruppenpaar von $\mathfrak{S}$, so gibt es in bezug auf A, B immer ein zu $\hat{\mathfrak{A}}$ gehöriges Verbindungssystem $\mathfrak{v}$. Die Verbindungselemente sind ideale Elemente von $\hat{\mathfrak{S}}$.

Beweis. Folgt aus 66.

71. (Lehrsatz.) In einem einfachen Satzsystem haben die Verbindungssysteme zweier verschiedener Maximalgruppenpaare kein gemeinsames ideales Element.

Beweis. Aus 61.

72. (Voraussetzung.) Sind A, B Komplexe von Elementen in einem System $\mathfrak{T}$ aus Elementen und Sätzen, so können wir die Existenz eines anderen Systems $\hat{\mathfrak{T}}$ annehmen, so daß jedem Element und jedem Satz von $\mathfrak{T}$ ein Element und ein Satz von $\hat{\mathfrak{T}}$ entspricht, $\hat{\mathfrak{T}}$ aber außerdem noch zu den Komplexen A, B ein Verbindungssystem enthält.

Über den Charakter dieser Voraussetzung ist dasselbe zu sagen wie über 37. Für das folgende wird es bequemer sein, wenn wir uns so ausdrücken, daß wir sagen: Wir können dem Paar der Komplexe A, B ein Verbindungssystem hinzufügen.

73. (Lehrsatz.) Ist $\mathfrak{S}$ ein einfaches Satzsystem, A, B ein Maximalgruppenpaar, $\hat{\mathfrak{A}}$ ein Axiomensystem ersten Grades zu $\mathfrak{S}$, $\hat{\mathfrak{B}}$ ein zu $\hat{\mathfrak{A}}$ gehöriges Verbindungssystem für das Maximalgruppenpaar A, B (70.), $\hat{\mathfrak{B}}^*$ irgendein anderes hinzugefügtes Verbindungssystem zu A, B (siehe 72.), so entspricht jedem Satz zwischen reellen Elementen von $\hat{\mathfrak{S}}$, der aus $\hat{\mathfrak{A}}$ und $\hat{\mathfrak{B}}^*$ bewiesen werden kann, ein Satz von $\mathfrak{S}$.

(Es ist angenommen, daß die hinzugefügten Elemente von $\hat{\mathfrak{B}}^*$ von den ursprünglich vorhandenen idealen Elementen von $\mathfrak{S}$ verschieden sind.)

Beweis. Sei $\hat{c} \to \hat{d}$ ein solcher Satz, der durch die zu $\hat{\mathfrak{A}}$ und $\hat{\mathfrak{B}}^*$ gehörige Reihe $\mathfrak{R}$

$$\hat{c} \to \alpha_1, \ldots \alpha_\varrho \to \hat{d}$$

von Sätzen bewiesen wird Wenn nun hier $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$ nicht zu $\hat{\mathfrak{A}}$ gehörte, müßte dieser Satz zu $\hat{\mathfrak{B}}^*$ gehören, also die Form $a \to b$ oder $a \to \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ besitzen.

(Jetzt und im folgenden soll a stets ein Element von A und b ein Element von B bedeuten, $\mathfrak{a}$ ein nicht reelles Element von $\hat{\mathfrak{S}}$, also ein ideales oder ein Verbindungselement.)

Im ersten Falle läßt sich $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$ durch $\hat{\mathfrak{A}}$ beweisen. Im zweiten Falle ist $\alpha_{\lambda+1}$ ein Verbindungselement, also von $\hat{d}$ verschieden, und es gibt noch einen Satz $\alpha_{\lambda+1} \to \alpha_{\lambda+2}$, der notwendig die Form $\mathfrak{a} \to \hat{b}$ haben müßte. Das Satzpaar $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$, $\alpha_{\lambda+1} \to \alpha_{\lambda+2}$ läßt sich also durch Axiome $\hat{\mathfrak{A}}$ ersetzen, und so auch im dritten Fall und für alle Sätze von $\mathfrak{R}$. Nunmehr folgt die Behauptung aus 53_2.

74. (Lehrsatz.) (Bezeichnung wie 73.) Ist $\hat{\mathfrak{A}}^*$ ein Satzsystem, das aus $\hat{\mathfrak{A}}$ entsteht, wenn die Sätze von $\hat{\mathfrak{B}}$ fortgenommen und die Sätze von $\hat{\mathfrak{B}}^*$ hinzugefügt werden, und läßt sich der zwischen reellen Elementen bestehende Satz $\hat{c} \to \hat{d}$ aus $\hat{\mathfrak{A}}^*$ und $\hat{\mathfrak{A}}$ beweisen, so gehört der entsprechende Satz $c \to d$ zu $\mathfrak{S}$.

Beweis. Folgt aus 73.

75. (Lehrsatz.) (Bezeichnung wie 73 und 74.) Läßt sich $\hat{c} \to \hat{d}$ aus $\hat{\mathfrak{A}}^*$ beweisen, so gilt in $\mathfrak{S}$ der Satz $c \to d$.

Beweis. Folgt aus 74.

76. (Lehrsatz.) (Bezeichnung aus 73. und 74.) Der Inbegriff $\hat{\mathfrak{S}}^*$ aller Elemente von $\hat{\mathfrak{A}}^*$ und aller aus $\hat{\mathfrak{A}}^*$ beweisbarer Sätze ist ein erweitertes System von $\mathfrak{S}$.

Beweis. Aus der Definition folgt, daß $\hat{\mathfrak{S}}^*$ ein abgeschlossenes System ist. Ferner ergibt sich aus 75., daß jedem Satz zwischen reellen Elementen $\hat{c} \to \hat{d}$ in $\hat{\mathfrak{S}}^*$ ein Satz $c \to d$ in $\mathfrak{S}$ entspricht. Es ist also noch zu zeigen, daß jedem Satz $c \to d$ ein Satz $\hat{c} \to \hat{d}$ in $\hat{\mathfrak{S}}^*$ entspricht oder daß jeder Satz $\hat{c} \to \hat{d}$ aus $\hat{\mathfrak{A}}^*$ bewiesen werden kann.

Da $\hat{c} \to \hat{d}$ aus $\hat{\mathfrak{A}}$ bewiesen werden kann, so gibt es eine zu $\hat{\mathfrak{A}}$ gehörige Reihe

$$\hat{c} \to \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \to \hat{d}.$$

Wenn nun darin der Satz $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$ nicht zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehörte, so müßte er zu $\hat{\mathfrak{B}}$ gehören, also die Form haben $\hat{a} \to \hat{b}$ oder $\hat{a} \to \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} \to \hat{b}$.

Im ersten Fall ersetzen wir ihn durch Sätze, die zu $\hat{\mathfrak{B}}^*$, also zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehören. Im zweiten Fall kann $\alpha_{\lambda+1}$, weil ideal, nicht letztes Element sein. Es schließt sich also ein Satz an $\alpha_{\lambda+1} \to \alpha_{\lambda+2}$ an. Hier muß nun $\alpha_{\lambda+2}$ reell sein, weil $\hat{\mathfrak{A}}$ vom ersten Grade ist. Also hat der Satz $\alpha_{\lambda+1} \to \alpha_{\lambda+2}$ die Form $\mathfrak{a} \to \hat{y}$. Gehörte y zu B, so könnte man das Satzpaar $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$, $\alpha_{\lambda+1} \to \alpha_{\lambda+2}$ durch einen Satz von der Form $\hat{a} \to \hat{b}$ oder durch Sätze von $\hat{\mathfrak{A}}^*$ ersetzen. Wenn aber y nicht zu B gehörte, so muß nach 64. in $\mathfrak{S}$ ein Satz $b_m \to y$ vorhanden sein, es muß also eine zu $\hat{\mathfrak{A}}$ gehörige Reihe

$$\hat{b}_m \to \beta_1,\ \beta_1 \to \beta_2 \ldots \beta_\varrho \to \hat{y}$$

geben. In diesem Falle ersetzen wir $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$, $\alpha_{\lambda+1} \to \alpha_{\lambda+2}$ durch die Reihe

$$\hat{a} \to \bar{\mathfrak{a}},\ \bar{\mathfrak{a}} \to \hat{b}_m,\ \hat{b}_m \to \beta_1,\ \beta_1 \to \beta_2 \ldots \beta_\varrho \to \hat{y},$$

oder durch eine Reihe $\hat{a} \to \hat{b}_m$, $\hat{b}_m - \beta_1$, $\beta_1 \to \beta_2 \ldots \beta_\varrho - \hat{y}$, wo die ersten beiden Sätze zu $\hat{\mathfrak{B}}^*$, also zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehören bzw. der erstere Satz, die anderen aber zu $\hat{\mathfrak{A}}$ gehören. Entsprechend verfährt man, wenn der Satz $\alpha_\lambda \to \alpha_{\lambda+1}$ die Form $\mathfrak{a} \to \beta$ hat.

Es zeigt sich also: Für jeden Satz oder jedes Satzpaar in unserer Reihe, das nicht zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehört, kann man einen zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehörigen Satz allein oder ein zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehöriges Satzpaar $\hat{a} \to \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \to \hat{b}$ verbunden mit weiteren Sätzen von $\hat{\mathfrak{A}}$ einführen. Dieses Verfahren wollen wir wiederholen. Es kann nur abbrechen, wenn die Reihe nur Sätze aus $\hat{\mathfrak{A}}^*$ besitzt. Wir wollen nun annehmen, das Verfahren bräche niemals ab. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß das nur dann der Fall ist, wenn dauernd neue Sätze von der Form $\hat{a} - \hat{b}$, also Satzpaare von der Form $\hat{a} - \bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{a}} - \hat{b}$ in unserer Reihe $\mathfrak{R}$ eingeführt werden. Es muß sich also auch einmal ereignen, daß unsere Reihe zwei gleiche Sätze oder Satzpaare enthält, etwa $\hat{a}_i \to \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \to \hat{b}_k$. Dann würden nach 74. in $\mathfrak{S}$ die Sätze $a_i \to b_k$, $b_k \to a_i$ vorkommen, $\mathfrak{S}$ also ein Netz enthalten.

Hieraus erkennt man, daß unsere Annahme falsch war; die Reihe muß abbrechen, d. h. $\hat{c} \to \hat{d}$ muß sich aus $\hat{\mathfrak{A}}^*$ beweisen lassen.

Zweiter Beweis[4]). Zu jedem Satz $c \to d$ gibt es eine Reihe zu $\mathfrak{A}$ gehöriger Sätze, $c \to \alpha_1 \ldots \alpha_\varrho \to d$, deren jede nach 63 zu einem und nur *einem* Maximalgruppenpaar gehört. Gehört $\alpha_\iota \to \alpha_{\iota+1}$ zu einem von (A, B) verschiedenen Maximalgruppenpaar, so gehört nach 66. $\hat{\alpha}_\iota \to \hat{\alpha}_{\iota+1}$ entweder zu $\hat{\mathfrak{A}}$ und nach 61. nicht zu $\hat{\mathfrak{B}}$, also zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$, oder läßt sich durch zwei Sätze von $\hat{\mathfrak{A}}$ ersetzen, die nach 61. oder 71. nicht zu $\hat{\mathfrak{B}}$ also zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ gehören. Gehört $\alpha_\varkappa \to \alpha_{\varkappa+1}$ zu (A, B), so gehört $\hat{\alpha}_\varkappa \to \hat{\alpha}_{\varkappa+1}$ zu $\hat{\mathfrak{B}}^*$ also zu $\hat{\mathfrak{A}}^*$ oder läßt sich durch zwei solche Sätze ersetzen.

---

[4]) Zusatz bei der Korrektur.

77. (Definition.) (Vgl. Definition 57.) Wir nennen ein Paar von Elementenkomplexen A, B ein kleines Komplexpaar, wenn ein Komplex nur ein Element enthält, ein mittleres Komplexpaar, wenn A und B beide zwei Elemente enthalten, ein großes Komplexpaar, wenn es weder kleines noch mittleres Komplexpaar ist.

78. (Lehrsatz.) Zu jedem Komplexpaar von den Satzzahlen m, n gibt es immer ein Verbindungssystem von der Satzzahl $m+n$.

Beweis. Nämlich ein zentriertes (siehe 68).

79. (Lehrsatz.) Ein nicht zentriertes Verbindungssystem $\mathfrak{B}$ zu einem großen Komplexpaar von den Elementzahlen m, n enthält immer mehr als $m+n$ Sätze.

Beweis. 1. $\mathfrak{B}$ ist disparat (siehe 68).

2. $\mathfrak{B}$ ist nicht disparat und nicht zentriert.

ad 1. Dann ist die Satzzahl $m \cdot n$. Es ist aber, wenn $m > n$ ist, $m+n < 2m \leqq m \cdot n$, und wenn $m = n$ ist, $m+n = 2m < n \cdot m$.

ad 2. Es genügt zu zeigen, daß die Satzzahl verringert werden kann. Seien $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$ zwei Verbindungselemente und $a' \rightarrow \mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}' \rightarrow b'$ und $a'' \rightarrow \mathfrak{v}''$, $\mathfrak{v}'' \rightarrow b''$ zwei zugehörige Satzpaare von $\mathfrak{B}$, wo $a' \not\equiv a''$, $b' \not\equiv b''$ ist. Wir lassen dann $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}''$ zusammenfallen und können entweder einen früher zwischen a' und b'' bestehenden Satz ersparen, oder können, falls wir früher die Sätze $a' \rightarrow \mathfrak{v}'''$, $\mathfrak{v}''' \rightarrow b''$ hatten, $\mathfrak{v}'''$ mit $\mathfrak{v}'$ und $\mathfrak{v}''$ zusammenfallen lassen, was ebenfalls zu einer Ersparung führt. Ähnlich schließt man, wenn $a' \not\equiv a''$, $b' \equiv b''$ oder $a' \equiv a''$, $b' \not\equiv b''$ oder $a' \equiv a''$, $b' \equiv b''$ ist. Ist nur *ein* Verbindungselement vorhanden, und entweder nur *ein* Antecedenselement als *ein* Succedenselement dazu, so kann das Verbindungselement weggelassen werden. Ist nur *ein* Verbindungselement vorhanden und mehr als *ein* Antecedenselement und mehr als *ein* Succedenselement dazu, und ist x ein nicht damit vorbundenes Element von A bzw. B, so ermöglicht die Hinzunahme des Satzes $x \rightarrow \mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v} \rightarrow x$ eine Ersparung.

80. (Lehrsatz.) Die Satzzahl eines Verbindungssystems für ein mittleres Komplexpaar beträgt 4, und zwar 4 nur dann, wenn das Verbindungssystem disparat oder zentriert ist.

81. (Lehrsatz.) Die Satzzahl zu einem Komplexpaar von den Elementenzahlen $m, 1$ oder $1, m$ beträgt mindestens m, und zwar m nur dann, wenn das Verbindungssystem disparat ist.

82. (Definition.) Zu einem abgeschlossenen Satzsystem $\mathfrak{S}$ ohne Netz heißt unabhängiges Minimalaxiomensystem ersten Grades ein unabhängiges Axiomensystem ersten Grades, wenn es zu $\mathfrak{S}$ kein anderes Axiomensystem ersten Grades gibt, das weniger Sätze enthält.

83. (Definition.) Zu einem einfachen Satzsystem $\mathfrak{S}$ ohne Netz heißt kanonisches System ein Satzsystem, das aus Verbindungssystemen der Maximalgruppenpaare von $\mathfrak{S}$ besteht, das nämlich zu jedem großen Maximalgruppenpaar von $\mathfrak{S}$ ein zentriertes, zu jedem kleinen Maximalgruppenpaar von $\mathfrak{S}$ ein disparates und zu jedem mittleren Maximalgruppenpaar von $\mathfrak{S}$ entweder ein zentriertes oder ein disparates Verbindungssystem enthält.

84. (Lehrsatz.) Zu jedem abgeschlossenen Satzsystem $\mathfrak{S}$ gibt es ein Minimalsystem ersten Grades.

Beweis. Es gibt ein Axiomensystem ersten Grades, nämlich das Axiomensystem $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ selbst. Also muß es auch ein unabhängiges Axiomensystem ersten Grades von der geringsten Satzzahl geben.

85. (Lehrsatz.) Jedes Minimalsystem ersten Grades eines einfachen Satzsystems $\mathfrak{S}$ ist ein kanonisches System.

Beweis. Sei $\hat{\mathfrak{A}}$ ein Minimalsystem ersten Grades zu $\mathfrak{S}$. Nach 70. ist jedes Maximalgruppenpaar von $\mathfrak{S}$ durch ein Verbindungssystem verbunden. Würde nun für ein Maximalgruppenpaar ein Verbindungssystem nicht den in 83. aufgestellten Forderungen genügen, so könnte es durch ein anderes ersetzt werden. Dadurch würde sich die Satzzahl nach 79. bis 81. verringern, aber nach 76. das System nicht aufhören Axiomensystem zu bleiben. Also könnte $\hat{\mathfrak{A}}$ nicht Minimalsystem sein. Daher enthält $\hat{\mathfrak{A}}$ zu jedem Maximalgruppenpaar ein Verbindungssystem, das den Forderungen von 83. genügt. Nach 56. sind aber durch die Sätze dieser Verbindungssysteme bereits alle Axiome von $\mathfrak{S}$ abzuleiten. Das Axiomensystem $\hat{\mathfrak{A}}$ ersten Grades kann also, da es Minimalsystem sein soll, keine weiteren Sätze enthalten.

86. (Lehrsatz.) Jedes kanonische Satzsystem ist ein Minimalaxiomensystem ersten Grades.

Beweis. Wir gehen von einem beliebigen Minimalaxiomensystem ersten Grades aus. Das vorgelegte kanonische System kann sich nach 85. von ihm nur durch das Verbindungssystem der mittleren Maximalgruppenpaare unterscheiden. Ersetzt man also in dem Minimalsystem ersten Grades in diesem Sinne diese Verbindungssysteme, so ändert sich die Satzzahl nicht und man erhält nach 76. ein Axiomensystem ersten Grades, das die geringste Satzzahl besitzt, daher unabhängig und ein Minimalaxiomensystem ersten Grades ist.

Göttingen, den 15. September 1921.

(Eingegangen am 25. 10. 1921.)

Beiträge zur Theorie der Materie.

Von

Ferencz Jüttner in Breslau.

§ 1.

Einleitender Überblick über die Entwicklung der Theorie der Materie.

Nach den gegenwärtigen Anschauungen der physikalischen Wissenschaft sind die Atome der wägbaren Materie aus je einem nach dem Stoff verschiedenen positiv elektrischen Teilchen, dem *Atomkern*, und einer Anzahl gleichartiger negativ elektrischer Teilchen, den *Elektronen*, aufgebaut. Dabei bestehen außerdem Gründe für die Auffassung, daß alle Kerne ihrerseits wieder — unter Beteiligung von Elektronen — aus einer einzigen Art positiv elektrischer Teilchen, nämlich den *Wasserstoffkernen*, zusammengesetzt sind. Somit führt das Problem der Materie auf die Frage nach der Möglichkeit und der Beschaffenheit eines elektrischen Elementarteilchens zurück. Man faßt diese Teilchen als räumlich sehr wenig ausgedehnte Ansammlungen elektrischer Ladungen auf, also nicht als im strengen Sinne punktförmig, weil sonst ihre Energie unendlich werden würde. Doch auch ein endlich ausgedehntes Teilchen ist auf dem Boden der elektromagnetischen Theorie Maxwells nicht unmittelbar möglich, weil es durch die elektrische Abstoßung seiner Bestandteile zersprengt werden müßte. Daher führte H. Poincaré[1]) im Jahre 1905 in seiner großen relativtheoretischen Abhandlung in die Elektronentheorie von H. A. Lorentz eine besondere Hilfskraft ein, indem er einen auf die Oberfläche des elektrischen Teilchens wirkenden Druck annahm, so daß das Elektron gleichsam von einer elastischen Haut zusammengehalten würde. Dabei sprach er

---

Anmerkung. Diese Abhandlung ist eine der Universität Breslau im Mai 1921 eingereichte Habilitationsschrift.

[1]) H. Poincaré, Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo 21 (1906), S. 129 bis 176 (Sitzung vom 23. Juli 1905); siehe besonders S. 164 bis 166.

bereits die Vermutung aus, daß dieser Druck zu der Schwereanziehung in Beziehung stehe[2]). Ebenfalls durch den Gedanken geleitet, daß die Existenz der Materie zugleich auf den Kräften des Elektromagnetismus und der Schwere beruhen müßte, veröffentlichte sodann G. Mie[3]) in den Jahren 1912 und 1913 eine recht eingehend ausgearbeitete Theorie der Materie. Als Kohäsionsdruck des Elektrons sah er ursprünglich allein das elektrische Potential φ an, wobei er aber nicht die elektromagnetische Theorie Maxwells zugrunde legte, sondern eine zugleich dem speziellen Relativitätsprinzipe und dem Wirkungsprinzipe genügende Erweiterung derselben. So vermochte er als erster unter gewissen Annahmen eine Differentialgleichung für das Elektron aufzustellen[4]) und führte auch für einen freilich ziemlich willkürlich gewählten Sonderfall die Integration vollständig durch. Indem er ferner sodann eine eigene dem speziellen Relativitätsprinzipe wie dem Wirkungsprinzipe gehorchende Gravitationstheorie, die derjenigen von M. Abraham verwandt ist, in seine Theorie der Materie einbaute, konnte er auch ein die Schwerkraft berücksichtigendes Gleichungssystem für das Elektron aufstellen[5]). Zur vollen Geltung kam freilich die Gravitation in der Theorie der Materie erst nach der in den Jahren 1913 bis 1915 durch A. Einstein erfolgten Aufstellung der allgemeinen Relativitätstheorie. Jetzt verschmolz D. Hilbert[6]) in einer in den Jahren 1915 und 1917 veröffentlichten Arbeit den Mieschen Gedanken einer verallgemeinerten dem Wirkungsprinzip genügenden Elektrodynamik mit Einsteins Gravitationstheorie und stellte damit auch die Grundlagen für eine den neuen Anschauungen entsprechende Theorie der Materie auf, ohne aber ihre wirkliche Durchführung im einzelnen zu geben. Als sodann H. Weyl[7]) im Jahre 1918 seine verallgemeinerte Relativitätstheorie schuf, die ebenfalls eine Erweiterung der gewöhnlichen elektromagnetischen Theorie in sich schließt, führte er den Zusammenhalt der Ladungen in den materiellen Elementar-

---

[2]) H. Poincaré, a. a. O., S. 166.

[3]) G. Mie, Grundlagen einer Theorie der Materie I, II, III. Ann. d. Phys. (4) **37** (1912), S. 511 bis 534; **39** (1912), S. 1 bis 40; **40** (1913), S. 1 bis 66; ferner: Das Prinzip von der Relativität des Gravitationspotentials, in der Festschrift für J. Elster und H. Geitel, Braunschweig 1915, S. 251 bis 268 (datiert: 27. April 1915). — Man vergleiche auch die klare kurze Darstellung von Mies Theorie in dem Buche „Raum, Zeit, Materie“ von H. Weyl, 3. Aufl., Berlin 1919, § 25.

[4]) G. Mie, a. a. O., II, S. 15, Gl. (34).

[5]) G. Mie, a. a. O., III, S. 33, Gl. (103).

[6]) D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik I u. II. Gött. Nachr., Math.-phys. Kl., 1915 u. 1917.

[7]) H. Weyl, Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. 1918, S. 465 bis 480; sowie: Reine Infinitesimalgeometrie, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 384 bis 411.

teilchen und deren Bau auf die allgemeine gravielektromagnetische Kraft seines neuen metrischen Feldes zurück[8]).

In den bisher genannten Ansätzen für eine Theorie der Materie wurde durchweg die Maxwellsche Theorie der Elektrizität durch eine allgemeinere ersetzt. Nach der Aufstellung der Gravitationstheorie Einsteins im Jahre 1915 lag nun andererseits der Gedanke nahe, ob sich nicht unter Beibehaltung der Maxwell-Lorentzschen elektromagnetischen Feldgleichungen, die natürlich in allgemein-kovarianter Gestalt anzuwenden wären, durch die Berücksichtigung der Schwereanziehung ein innerer Zusammenhalt der Ladungen ergäbe. H. Reißner[9]) untersuchte 1916 diese Frage, fand aber eine verneinende Antwort. Wollte man trotzdem in dieser Richtung weiter gehen, so war als Ausweg eine Abänderung der Feldgleichungen der Schwere möglich, die aber noch immer auf dem allgemeinen Boden der Einsteinschen Gravitationstheorie, nämlich der Riemannschen Geometrie, verharrte. Diesen Weg beschritt Einstein[10]) im Jahre 1919 mit erheblichem Erfolge, indem jetzt die Schwere als zusammenhaltende Kraft in der Tat genügte. Doch ergab sich leider gerade im statischen kugelsymmetrischen Fall eine Gleichung zu wenig, so daß nach dieser Theorie jede derartige Verteilung der Elektrizität im Gleichgewicht verharren müßte, was doch gewiß der Wirklichkeit nicht entspricht. Damit war hier gerade für die Erklärung des Elektrons oder des Atomkerns eine große Schwierigkeit entstanden.

Alle bis jetzt erwähnten Theorien der Materie oder des Elektrons und Kerns haben eine allgemeine Voraussetzung gemeinsam: sie betrachten die Materie nicht als eine wirkliche und vollkommene Unstetigkeit im Felde von der Art eines Fremdkörpers, sondern nur als einen Bezirk des Feldes, in dem seine Zustandsgrößen einen sehr hohen Wert besitzen. Jede bei der mathematischen Behandlung des Problems auftretende Unstetigkeit der Feldgrößen ist bei dieser Anschauung nur als eine Annäherung an die stetige Wirklichkeit aufzufassen. So ist z. B. nach Mies[11]) ausführlich ausgesprochener Ansicht das Elektron kein scharfbegrenztes

---

[8]) H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie, Ann. d. Phys. (4) 59 (1919), S. 101 bis 133; sowie in der 3. Aufl. von Weyls Buch „Raum, Zeit, Materie", Berlin 1919, § 34 und 35.

[9]) H. Reißner, Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie, Ann. d. Phys. (4) 50 (1916), S. 106 bis 120. Man vergleiche auch den allgemeinen Beweis auf S. 350 u. 351 der nachstehend unter [10]) genannten Abhandlung Einsteins.

[10]) A. Einstein, Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsber. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1919, S. 349 bis 356.

[11]) G. Mie, I, S. 512.

Raumteilchen im Äther, sondern es besteht aus einem Kern, der stetig in eine Atmosphäre von elektrischer Ladung übergeht, die sich bis ins Unendliche erstreckt, aber schon ganz nahe am Kern so außerordentlich dünn wird, daß man sie auf keine Weise experimentell bemerken kann.

Dieser Feldauffassung der Materie im Sinne Mies hatte sich auch Weyl bisher in seiner gravielektromagnetischen Theorie angeschlossen. Ganz jüngst jedoch, im Jahre 1921, stellt er der Mieschen Ansicht eine völlig andersartige gegenüber, die gerade den Begriff der Unstetigkeit als das Wesentliche zugrunde legt[12]). Er erweitert nämlich jetzt den Begriff des nicht-Riemannschen vierdimensionalen Raumes seiner Relativitätstheorie vom Standpunkte der Analysis situs aus und schreibt diesem Raume einen solchen Zusammenhang zu, daß er innere in der Zeitrichtung schlauchartig ins Unendliche sich erstreckende Grenzflächen besitzt. Diese Begrenzungen sollen nun durch die einzelnen materiellen Elementarteilchen gebildet werden, und zwar sollen die Teilchen dadurch ausgezeichnet sein, daß in ihrem Inneren die Feldgrößen singulär werden. Als Maß dieser Singularität dient die Masse, die Weyl hier als Fluß des Gravitationsfeldes durch die Oberfläche des betrachteten Raumteiles erklärt und die somit ein Gegenstück zur elektrischen Ladung bildet, dem Fluß des elektrischen Feldes durch die betreffende Oberfläche. Die Materie als Unstetigkeitsgebiet gehört nach dieser Auffassung selbst nicht mehr zum Felde und gehorcht nicht den Feldgesetzen, so daß also hier die Frage nach dem Kohäsionsdruck des Elektrons ihren Sinn verliert.

Nach der vorgetragenen historischen Übersicht bilden Einsteins Theorie von 1919 und Weyls Theorie von 1918 die bisher erreichten wesentlichen Endpunkte der Entwicklung in der allgemeinen Lehre von der Materie. Die folgenden Ausführungen sollen sich nun damit beschäftigen, Einsteins Theorie durch Benutzung der Weylschen geometrischen Vorstellungen von der oben erwähnten Schwierigkeit zu befreien und dann auf dieser Grundlage das materielle Elementarteilchen zu berechnen. Zum Vergleich sollen hierauf die Gleichungen des Materieteilchens aufgestellt werden, zu denen die eigentliche auf dem Hamiltonschen Prinzip beruhende Weylsche Physik unter gewissen sehr allgemeinen Voraussetzungen führt. Weyls neue Auffassung von 1921 dagegen wird hier keine Rolle spielen, da sie nicht imstande ist, zu neuen Gleichungen für das Elektron und den positiven Kern zu führen, sondern bisher allein eine neue Deutung der schon aus seiner Theorie von 1918 folgenden Gleichungen bildet.

---

[12]) H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie“, 4. Aufl., Berlin 1921, § 32 und 36.

I. Hauptteil.

Die Materie nach einer Abänderung von Einsteins Theorie von 1919 unter Benutzung der Weylschen Geometrie ohne Anwendung des Hamiltonschen Prinzips.

§ 2.

Darlegung von Einsteins Theorie von 1919.

Das im ersten Hauptteil erstrebte Ziel besteht, wie angegeben, darin, von der 1919 von Einstein gegebenen Theorie aus durch eine geeignete Abänderung derselben zu den Gleichungen für das materielle Elementarteilchen zu gelangen. Zu diesem Zwecke sollen daher zuerst die in Betracht kommenden Einsteinschen Ansätze kurz dargelegt werden.

Für das Schwerefeld stellte Einstein im November 1915, als er seine allgemeine Relativitätstheorie zum ersten maßgebenden Abschluß brachte, folgendes Gleichungssystem auf:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \varkappa T_{ik}. \tag{1}$$

Hier bedeutet R_{ik} den aus dem Riemannschen Krümmungstensor $R^{\alpha}_{i\beta k}$ durch Verjüngung abgeleiteten Krümmungstensor zweiten Ranges, R die zu diesem gehörende skalare Krümmung[13]) und T_{ik} den Energietensor der Materie; es gilt also[14]):

$$\begin{cases} R_{ik} = R^{\alpha}_{i\alpha k} = - R^{\alpha}_{ik\alpha} = \dfrac{\partial \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix}}{\partial x_s} - \dfrac{\partial \begin{Bmatrix} is \\ s \end{Bmatrix}}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} ik \\ s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} st \\ t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} is \\ t \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} kt \\ s \end{Bmatrix}; \\ R_{ik} = R_{ki}. \end{cases} \tag{2}$$

$$R = g^{ik} R_{ik}. \tag{3}$$

Im Februar 1917 verallgemeinerte Einstein sodann die Feldgleichungen der Schwere, um gewissen astronomischen Grundtatsachen Rechnung tragen zu können, durch Hinzufügung eines sogenannten kosmologischen Gliedes:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \lambda g_{ik} = \varkappa T_{ik}; \tag{4}$$

dabei ist λ eine Konstante.

Soll nun die elektromagnetische Auffassung der Materie durchgeführt werden, so ist anstatt des allgemeinen Energietensors T_{ik} der elektro-

---

13) Die Vorzeichen von R_{ik} und R, aber nicht von $R^{\alpha}_{i\beta k}$, sind hier entgegengesetzt gewählt als bei Einstein, im Einklange mit Weyl, „Raum, Zeit, Materie", 3. Aufl.

14) Über im selben Gliede doppelt auftretende Zeiger ist stets zu summieren.

magnetische Energietensor S_{ik} der Maxwell-Lorentzschen Theorie in die Feldgleichungen einzusetzen:

$$S_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - f_{i\alpha} f_{k\beta} g^{\alpha\beta}. \tag{5}$$

Hierbei ist:

$$f^{\alpha\beta} = g^{\sigma\alpha} g^{\tau\beta} f_{\sigma\tau}, \tag{6}$$

und $f_{\alpha\beta}$ ist der elektromagnetische Feldtensor, ein Sechservektor, dessen kovariante Komponenten folgende Bedeutung haben:

$$\left\{ \begin{array}{lll} f_{23} = \mathfrak{H}_x, & f_{31} = \mathfrak{H}_y, & f_{12} = \mathfrak{H}_z, \\ f_{10} = \mathfrak{E}_x, & f_{20} = \mathfrak{E}_y, & f_{30} = \mathfrak{E}_z. \end{array} \right. \tag{7}$$

Die Feldkomponenten $f_{\alpha\beta}$ genügen dem zweiten Gleichungssystem Maxwells (d. h. Faradays Induktionsgesetz):

$$\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial f_{\nu\varrho}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial f_{\varrho\mu}}{\partial x_\nu} = 0, \tag{8}$$

das vier Gleichungen entspricht, von denen jedoch nur drei voneinander unabhängig sind, nämlich diejenigen, die auch einen zeitlichen Differentialquotienten enthalten.

Eine Beziehung zwischen dem folgenden V-Tensor (oder der Tensordichte) des elektromagnetischen Feldes

$$\mathfrak{f}^{\alpha\beta} = \sqrt{g}\, f^{\alpha\beta}, \quad \text{wobei} \quad -g = \text{Det.}\,|g_{ik}|, \tag{9}$$

und dem V-Vektor (oder der Vektordichte) der elektrischen Stromdichte

$$\mathfrak{s}^\alpha = \sqrt{g}\, s^\alpha, \quad \text{wo} \quad s^0 = \varrho, \quad s^1 = \mathfrak{i}_x, \quad s^2 = \mathfrak{i}_y, \quad s^3 = \mathfrak{i}_z, \tag{10}$$

wird durch das erste Gleichungssystem Maxwells gegeben:

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathfrak{s}^\alpha. \tag{11}$$

Führt man nun, um in der geplanten Weise eine Theorie des Elektrons und Atomkerns herzustellen, den Energietensor S_{ik} an Stelle von T_{ik} in die Feldgleichung (1) ein, so zeigt sich bald, wie schon in der Einleitung erwähnt, daß das Ziel auf diese Art nicht erreichbar ist. Bildet man nämlich die allgemein kovariante Divergenz von Gleichung (1) und beachtet dabei, daß die Divergenz der linken Seite verschwindet, so erhält man:

$$f_{i\alpha} \mathfrak{s}^\alpha = 0, \tag{12}$$

so daß also

$$\mathfrak{s}^\alpha = 0 \tag{13}$$

folgt. Auch aus (4) ergeben sich dieselben Gleichungen (12) und (13). Daher sind nach der bisherigen Theorie elektrische Materieteilchen von der Art der Elektronen und Kerne nicht möglich. Die hier vorliegende Schwierigkeit sucht nun Einstein dadurch zu lösen, daß er seine Feldgleichungen (1) als nicht völlig richtig ansieht. Insbesondere hält er, wie er durch eine den Impuls-Energie-Satz betreffende Überlegung genauer begründet[15]), das zweite Glied der linken Seite von (1) für nicht hinreichend gesichert. Zu dieser Auffassung führt ihn noch eine andere Eigentümlichkeit der Gleichung (1), die ebenfalls von jenem zweiten Gliede abhängt. Der Maxwell-Lorentzsche Energietensor S_{ik} hat bekanntlich, wie man aus (5) bei Beachtung der Formel

$$g_{ik} g^{ik} = 4$$

sofort durch Ausrechnung finden kann, die Eigenschaft, daß sein Skalar S identisch Null ist:

$$S = g^{ik} S_{ik} = 0, \tag{14}$$

was bei einem beliebigen Materietensor T_{ik} nicht der Fall ist. Daher folgt aus (1) für $T_{ik} = S_{ik}$ die Skalargleichung

$$R = 0, \tag{15}$$

eine Bedingung, die eigentümlicherweise unabhängig von der Beschaffenheit des elektrischen Feldes von den g_{ik} überall erfüllt sein müßte. Es nimmt daher übrigens (1) die Form an:

$$R_{ik} = \varkappa S_{ik}. \tag{1a}$$

Entsprechend folgt aus (4) die Gleichung

$$R = -4\lambda, \tag{15a}$$

und (4) selbst geht über in:

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = \varkappa S_{ik}. \tag{4a}$$

Endlich hält Einstein auch die Art, wie die Feldgleichung (1) durch Einführung einer neuen Konstanten λ, die von der Gesamtmasse der Welt abhängt, erweitert werden mußte, für einen schwerwiegenden Schönheitsfehler der Theorie.

Daher gab Einstein im April 1919 den Feldgleichungen der Schwere die neue dritte Gestalt:

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = \varkappa S_{ik}. \tag{16}$$

---

[15]) A. Einstein, Berl. Ber. 1919, S. 350.

Das zweite Glied der linken Seite ist hier so gewählt, daß die Gleichung *skalarfrei* ist; d. h. ihre Skalargleichung wird durch die Identität

$$0 = 0$$

gebildet, wie die Ausrechnung sofort zeigt. Von den Gleichungen (16) sind daher nur 9 unabhängig. Damit ist erstlich die bei Gleichung (15) erwähnte Schwierigkeit behoben. Durch Divergenzbildung folgt aus (16):

$$f_{i\alpha} s^\alpha - \frac{1}{4\kappa}\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0, \tag{17}$$

so daß also hier anders als oben bei (12) die elektrische Stromdichte s^α im allgemeinen nicht verschwindet und elektrische Elementarteilchen möglich sind. Dabei bedeutet $-\frac{1}{4\kappa}\frac{\partial R}{\partial x_i}$ die äußere Kohäsionskraft, die das Teilchen zusammenhält, und somit $\frac{R}{4\kappa}$ den Kohäsionsdruck. Endlich läßt sich auch aus (16) eine Gleichung von der kosmologischen Gestalt (4) ableiten, wo aber jetzt λ nicht als besondere universelle Konstante, sondern als Integrationskonstante auftritt. Trotz dieser ausgezeichneten Erfolge der neuen Feldgleichungen gestatten sie leider dennoch nicht, den Bau der materiellen Elementarteilchen zu berechnen, da die Systeme (16) und (8), wie Einstein angibt, gerade im statischen kugelsymmetrischen Falle eine Gleichung zu wenig zur Ermittlung der g_{ik} und f_{ik} enthalten,

Es möge hier schließlich noch gezeigt werden, daß sich die in Rede stehende Aufgabe sehr vereinfachen läßt, wenn man statt des Feldtensors f_{ik} das elektromagnetische Viererpotential φ_i einführt. Seine Komponenten sind:

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_1 = \mathfrak{A}_x, \quad \varphi_2 = \mathfrak{A}_y, \quad \varphi_3 = \mathfrak{A}_z, \tag{18}$$

wobei φ das skalare Potential und $\mathfrak{A}$ das negative Vektorpotential ist. Dann gilt die Beziehung

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \tag{19}$$

und es erweisen sich jetzt die zweiten Maxwellschen Gleichungen (8) als identisch erfüllt, so daß sie fortbleiben können. Das Problem der Materie ist damit auf die Berechnung der g_{ik} und φ_i aus den Gravitationsgleichungen (16) allein zurückgeführt.

§ 3.

Die Hebung der in Einsteins Theorie auftretenden Schwierigkeit.

Es soll nun versucht werden, die erwähnte Schwierigkeit in Einsteins Theorie zu beseitigen.

Am nächsten liegt in dieser Hinsicht der Gedanke, die Feldgleichungen der Schwere durch Einführung anderer Zahlenkoeffizienten weiter abzuändern, zumal ja auch Einstein selbst bei der Aufstellung seiner Gleichungen von 1919 so vorgegangen ist.

Offenbar lassen sich nun alle drei Formen (1), (4) und (16) der Feldgleichungen der Schwere unter der Annahme, daß als Materietensor allein der elektromagnetische Tensor S_{ik} angesehen wird, als Sonderfälle folgenden allgemeineren Systems auffassen:

$$R_{ik} - \mu g_{ik} R + \lambda g_{ik} = \varkappa S_{ik}. \tag{20}$$

Hier müßte man jetzt die Konstanten μ und λ dem gewünschten Zwecke gemäß zu bestimmen versuchen. Durch Multiplikation mit g^{ik} bilde man die zu (20) gehörende Skalargleichung, indem man Gleichung (14), nämlich $S \equiv 0$, beachtet:

$$R - 4\mu R + 4\lambda = 0. \tag{21}$$

Unter der Annahme $R = 0$ folgt aus (21) sogleich $\lambda = 0$; also gibt (20) dann:

$$R_{ik} = \varkappa S_{ik},$$

d. i. Gleichung (1) in der Form (1a), die durch Einführung von S_{ik} an Stelle von T_{ik} entsteht.

Macht man jetzt die andere Annahme $R = -4\lambda$, so gibt (21) sofort $\mu = 0$; also folgt aus (20):

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = \varkappa S_{ik},$$

d. i. Gleichung (4a), die Gleichung (4) entspricht.

Nimmt man endlich den allgemeinen Fall an $R \begin{cases} \neq 0 \\ \neq -4\lambda \end{cases}$, so folgt aus (21) durch Multiplikation mit $\frac{1}{4} g_{ik}$:

$$\lambda g_{ik} = -\frac{1}{4} g_{ik} R + \mu g_{ik} R.$$

Beim Einsetzen dieses λ-Gliedes in (20) hebt sich das μ enthaltende Glied fort, und man erhält:

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = \varkappa S_{ik},$$

d. i. genau Gleichung (16).

Auch Gleichung (4a) geht übrigens aus (16) hervor, wenn man zu (16) die Bedingungsgleichung (vgl. (15a)) hinzufügt:

$$R = -4\lambda.$$

Somit kommt man von der allgemeinen Gleichung (20) unter der Annahme, daß der Materietensor der elektromagnetische Energietensor

Maxwells ist, doch stets allein auf die drei früheren Formen (1), (4) und (16) zurück. Die Behebung der bezüglich Elektron und Atomkern bestehenden Schwierigkeit ist also durch eine dem Vorbild (20) entsprechende Verallgemeinerung der Gravitationsgleichungen nicht möglich.

Ein Ausweg aus der Schwierigkeit ist nun dadurch zu finden, daß man sich unter Beibehaltung des Einsteinschen Gedankenganges von dem Boden der Riemannschen Geometrie auf denjenigen der allgemeineren Weylschen Geometrie begibt. Dabei soll also die eigentliche Weylsche Physik, die auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung beruht, hier gar nicht benutzt werden. Man hat demgemäß nur in die skalarfreien Feldgleichungen (16) von Einstein sinngemäß die entsprechenden Größen der Weylschen Geometrie einzuführen. Dabei kann man sodann die in dieser Geometrie auftretende Eichung so einrichten, daß die skalare Krümmung F, die der skalaren Krümmung R entspricht, aber hier auch von den φ_i abhängt, konstant wird[16]). Andererseits kann man auch die Eichung willkürlich lassen, so daß dafür eine andere Bedingung vorgeschrieben werden kann. So wird dann, wie sich zeigen wird, der Einsteinsche Gedankengang auf dem Boden der Weylschen Geometrie völlig durchführbar sein.

Es sollen daher jetzt zuerst die erforderlichen Krümmungsgrößen dieser allgemeineren Geometrie zusammengestellt und besprochen werden.

§ 4.

Die Krümmungsgrößen in Weyls Geometrie.

Da Weyls verallgemeinerte Relativitätstheorie außer der Schwere auch den Elektromagnetismus geometrisch auffaßt und deutet, so treten in den Formeln seiner hier auf 4 Dimensionen zu beziehenden Geometrie neben den 10 Größen g_{ik} gewöhnlich auch die 4 Größen φ_i auf. Statt der Christoffelschen Dreizeiger-Ausdrücke zweiter Art $\left\{ {ik \atop s} \right\}$, die nur die g_{ik} enthalten, hat man dementsprechend hier die Komponenten Γ^s_{ik} des affinen Zusammenhangs:

$$\Gamma^s_{ik} = \left\{ {ik \atop s} \right\} + \tfrac{1}{2}(\delta^s_i \varphi_k + \delta^s_k \varphi_i - g_{ik}\varphi^s), \tag{22}$$

wobei

$$\varphi^i = g^{ik}\varphi_k \quad \text{und} \quad \delta^k_i \begin{cases} = 1 & \text{für } i = k \\ = 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases} \tag{22a}$$

Aus diesen Größen Γ^s_{ik} baut sich sodann der Weylsche Krümmungstensor 4. Ranges $F^\alpha_{i\beta k}$ auf, der die Verallgemeinerung des Riemannschen

[16]) H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie", 3. Aufl., S. 253, sowie 4. Aufl., S. 121; ferner „Elektrizität und Gravitation", Phys. Zeitschr. 21 (1920), S. 649 bis 650.

Tensors $R^{\alpha}_{i\beta k}$ darstellt. Durch Verjüngung entsteht daraus der Krümmungstensor 2. Ranges F_{ik}; zu ihm gehört der Krümmungsskalar F. Die F_{ik} und F definierenden Formeln lauten entsprechend zu (2) und (3) wie folgt:

$$F_{ik} = F^{\alpha}_{i\alpha k} = \frac{\partial \Gamma^{r}_{ik}}{\partial x_r} - \frac{\partial \Gamma^{r}_{ir}}{\partial x_k} + \Gamma^{r}_{ik}\Gamma^{s}_{rs} - \Gamma^{s}_{ir}\Gamma^{r}_{ks}, \tag{23}$$

$$F = g^{ik} F_{ik}. \tag{24}$$

Da der Tensor F_{ik} nicht symmetrisch ist, wird er für unseren Zweck, wie sich zeigen wird, nicht unmittelbar als Ersatz des Tensors R_{ik}, der symmetrisch ist, verwendbar sein. Daher bilde man[17]) jetzt aus F_{ik} folgendermaßen einen symmetrischen Tensor Q_{ik}:

$$Q_{ik} = \frac{1}{2}(F_{ik} + F_{ki}). \tag{25}$$

Für den zugehörigen Skalar Q folgt aus (24) und (25) sofort:

$$Q = g^{ik} Q_{ik} = F. \tag{26}$$

In einer mehr entwickelten Form, die die Beziehung zur Riemannschen Geometrie hervortreten läßt, stellt sich Q_{ik} mittels folgender Gleichung dar:

$$Q_{ik} = R_{ik} - \Psi_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\Phi + \frac{1}{2}\varphi_i\varphi_k - \frac{1}{2} g_{ik}(\varphi_s\varphi^s). \tag{27}$$

Hier ist Ψ_{ik} ein symmetrischer Ausdruck, der aus dem Riemannschen kovarianten Differentialquotienten Φ_{ik} von φ_i, nämlich

$$\Phi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \varphi_s,$$

gebildet worden ist:

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{2}(\Phi_{ik} + \Phi_{ki}),$$

so daß also gilt:

$$\Psi_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right) - \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} \varphi_s. \tag{28}$$

Ferner bedeutet Φ die allgemein invariante Divergenz von φ^i, die sich aus dem Riemannschen kovarianten Differentialquotienten Φ^k_i von φ^k, nämlich

$$\Phi^k_i = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_i} + \begin{Bmatrix} i\,s \\ k \end{Bmatrix} \varphi^s,$$

---

[17]) W. Pauli jun., Zur Theorie der Gravitation und Elektrizität von Hermann Weyl, Phys. Zeitschr. **20** (1919), S. 457 bis 467, insbesondere S. 458 und 459 (dort ist „$-\hat{R}_{ik}$" statt Q_{ik} gesetzt; überhaupt haben dort die Krümmungstensoren und -skalare sowie die φ_i das entgegengesetzte Vorzeichen als oben). — R. Bach, Zur Weylschen Relativitätstheorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs, Math. Zeitschr. **9** (1921) S. 110 bis 135 (dort ist die Bezeichnung $S_{\alpha\beta}$ statt Q_{ik} benutzt). Vgl. auch H. Weyl, Math. Zeitschr. **2**, a. a. O., insbesondere S. 403 und 404.

durch Verjüngung ableitet:

$$\Phi = \Phi_i^i;$$

daher ist:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g}\,\varphi^i)}{\partial x_i}. \tag{29}$$

Für die skalare Krümmung $Q = F$ erhält man aus (27), da

$$g^{ik}\Psi_{ik} = g^{ik}\Phi_{ik} = \Phi$$

ist, folgenden entwickelten Ausdruck[18]):

$$Q = R - 3\,\Phi - \frac{3}{2}(\varphi_s \varphi^s). \tag{30}$$

Aus Q_{ik} findet man F_{ik} mittels der Formel[19]):

$$F_{ik} = Q_{ik} - f_{ik}, \tag{31}$$

wo gemäß der früheren Gleichung (19) gilt:

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}. \tag{19}$$

Der elektromagnetische Feldtensor f_{ik} ist also in geometrischer Auffassung ein Bestandteil der allgemeinen Krümmung 2. Ranges F_{ik}, und zwar stellt er die sogenannte *Streckenkrümmung* dar.

Die Tensoren und Skalare der Weylschen Geometrie haben nicht nur die Eigenschaft der Koordinaten-Invarianz, wie in der Riemannschen Geometrie, sondern auch die der Eich-Invarianz, d. h. der Invarianz gegenüber der Umeichung mittels des Eichfaktors μ, die durch folgende Gleichungen ausgedrückt wird:

$$\overline{g}_{ik} = \mu\, g_{ik}, \qquad \overline{\varphi}_i = \varphi_i - \frac{\partial \log \mu}{\partial x_i}. \tag{32}$$

Bei einer allgemeineren Fassung des Tensorbegriffs multiplizieren sich die Tensorkomponenten bei einer mittels des Eichfaktors μ ausgeführten Umeichung mit der Potenz μ^e; dann heißt e das Gewicht des Tensors. Unmittelbare physikalische Bedeutung haben jedoch nur die Tensoren vom Gewichte Null, wie F_{ik}, Q_{ik} und f_{ik}.

Bemerkt sei schließlich noch, daß beim Verschwinden des elektromagnetischen Feldes, also für $\varphi_i = 0$, die Weylschen Größen in die entsprechenden Riemannschen übergehen, so daß dann gilt:

$$(\Gamma_{ik}^s)_0 = \left\{ {ik \atop s} \right\}, \qquad (F_{ik})_0 = (Q_{ik})_0 = R_{ik}, \qquad (F)_0 = (Q)_0 = R. \tag{33}$$

---

[18]) H. Weyl, siehe vorige Anmerkung.

[19]) W. Pauli, a. a. O.

§ 5.
Verallgemeinerung von Einsteins Feldgleichung durch Anwendung von Weyls Geometrie.

Nach den getroffenen Vorbereitungen soll nun die Verallgemeinerung von Einsteins skalarfreier Feldgleichung der Schwere

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = \varkappa S_{ik} \tag{16}$$

durch ihre Verpflanzung auf den Boden der Weylschen Geometrie vorgenommen werden.

Zuerst werde die linke Seite von (16) betrachtet. Am nächsten läge hier die Ersetzung von R_{ik} durch den Tensor F_{ik}. Da dieser aber, wie man aus (31) ersieht, unsymmetrisch ist und 16 Komponenten besitzt, ist er nicht brauchbar. Man muß vielmehr statt F_{ik} den aus ihm gemäß (25) gebildeten Tensor Q_{ik} nehmen, der ebenso wie R_{ik} symmetrisch ist. Statt R ist dementsprechend der Skalar $Q = F$ einzusetzen. So erhält man für die linke Seite:

$$Q_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} Q. \tag{34}$$

Die rechte Seite, die gemäß (5) gleich

$$\varkappa S_{ik} \equiv \varkappa \left(\frac{1}{4} g_{ik} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - f_{i\alpha} f_{k\beta} g^{\alpha\beta}\right) \tag{35}$$

ist, paßt sich, da sie einen aus der Streckenkrümmung f_{ik} aufgebauten symmetrischen Tensor darstellt, in die Weylsche Geometrie ohne weiteres ungeändert ein[20]). Trotzdem darf man die Ausdrücke (34) und (35) nicht unmittelbar einander gleich setzen. Denn die so erhaltene Gleichung wäre zwar kovariant gegenüber einer beliebigen Änderung der Koordinaten, aber nicht gegenüber einer Änderung der Eichung, und hätte daher auf dem Boden der Weylschen Geometrie keine physikalische Bedeutung. In der Tat ist das Gewicht von Q_{ik} gleich 0, von Q gleich „-1“ und von g_{ik} gleich $+1$, somit von (34) selbst gleich 0. Für (35) ist noch zu beachten, daß das Gewicht von f_{ik} gleich 0, von f^{ik} gleich „-2“ und von g^{ik} gleich „-1“ ist; demgemäß besitzt (35) das Gewicht „-1“. Wegen ihres ungleichen Gewichts können die Tensoren (34) und (35) in der Weylschen Geometrie nicht gleichgesetzt werden, da ihre Gleichheit durch eine Änderung der Eichung ja sofort zerstört würde. Doch ist es wohl möglich, aus dem Tensor (35) vom Gewicht „-1“ einen solchen vom Gewicht 0 herzustellen; man muß zu diesem Zwecke (35) durch einen Skalar vom Gewichte „-1“ dividieren. Als solchen findet man,

[20]) Vgl. auch H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie“, 3. Aufl., S. 250 unten.

wenn man die von R. Weitzenböck[21]) ermittelte vollständige Reihe der ganz und rational gebauten Skalare der Weylschen Geometrie durchgeht, bei Beschränkung auf einen rationalen Ausdruck allein die Größe Q, falls man von einem konstanten Faktor absieht. Es kommen nämlich von den dort angeführten Skalaren nur die drei in Betracht, die in bezug auf eine Koordinatenänderung *absolut* invariant sind, also $f_{ik}f^{ik}$, F^2 und die aus der Richtungskrümmung ${}^*F_{iklm}$, einem Bestandteil des Tensors F_{iklm}, gebildete Größe ${}^*F_{iklm}{}^*F^{iklm}$. Diese drei Invarianten haben je das Gewicht (Eichgewicht) „-2", die Quadratwurzel aus ihnen somit das Gewicht „-1". Jedoch ist diese Quadratwurzel nur aus F^2 rational ausziehbar, so daß man auf die einzige Invariante $F = Q$ von den gewünschten Eigenschaften zurückkommt, wie oben behauptet.

Demgemäß lautet die gesuchte Feldgleichung

$$Q_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} Q = \varkappa \frac{S_{ik}}{Q}, \tag{36}$$

wobei jetzt $\varkappa$ eine Konstante von beliebigem Zahlwert sei. Diese Gleichung ist also kovariant gegenüber einer Koordinatenänderung wie gegenüber einer Eichungsänderung. Ferner ist sie, wie eine Multiplikation mit g^{ik} sofort ergibt, skalarfrei und entspricht daher 9 unabhängigen Gleichungen, solange man die Eichung unbestimmt läßt.

Ist $\varphi_i = 0$ und also auch $S_{ik} = 0$, somit kein elektromagnetisches Feld und daher auch keine Materie vorhanden, so nimmt gemäß (33) die Feldgleichung (36) folgende Gestalt an:

$$R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = 0. \tag{37}$$

Diese Gleichung folgt für $\varphi_i = 0$, $S_{ik} = 0$ auch aus der früheren Feldgleichung (16), so daß voller Einklang mit ihr vorhanden ist. Der Ansatz

$$R_{ik} = 0 \tag{38}$$

stellt offenbar eine Lösung von (37) dar. Aus ihm folgt bekanntlich als Näherung die Newtonsche Theorie der Schwere (nämlich die Laplacesche Gleichung) und außerdem auch die Perihelbewegung des Merkur sowie die Ablenkung der Lichtstrahlen durch die Sonne. Somit befindet sich auch die allgemeine Feldgleichung (36) mit den angeführten Beobachtungen in derselben Weise im Einklang wie Einsteins Theorie.

Auch im allgemeinen Falle, wenn das elektromagnetische Potential φ_i nicht verschwindet und also Materie vorhanden ist, kann die neue Feld-

[21]) R. Weitzenböck, Über die Wirkungsfunktion in der Weylschen Physik, 1. und 2. Mitteilung. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. II a, 129 (1920), S. 683 bis 708; vgl. die Tabelle am Schlusse der 2. Mitteilung.

gleichung (36) in eine der früheren Feldgleichung (16) ganz ähnliche Form gebracht werden, indem man (27) und (30) anwendet; man erhält so:

$$(39)\begin{cases} R_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} R = \varkappa U_{ik}, \\ U_{ik} = \frac{S_{ik}}{R - 3\,\Phi - \frac{3}{2}(\varphi_s \varphi^s)} + \frac{1}{\varkappa}\left(\Psi_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik}\,\Phi - \frac{1}{2}\varphi_i \varphi_k + \frac{1}{8} g_{ik}(\varphi_s \varphi^s)\right). \end{cases}$$

Diese Gleichung könnte formal derart als Verallgemeinerung von (16) aufgefaßt werden, daß als Energietensor statt desjenigen S_{ik} von Maxwell ein allgemeinerer U_{ik} im Sinne von Mie benutzt wird. Allerdings ist als zugrunde zu legende Geometrie hier nicht die Riemannsche, sondern stets die Weylsche anzusehen und anzuwenden, z. B. bei der Bildung von kovarianten Differentialquotienten.

Schließlich möge mit wenigen Worten auf die Berechnung des V-Vektors der elektrischen Stromdichte $\mathfrak{s}^\alpha$ eingegangen werden. Dem ersten Gleichungssystem Maxwells

$$(11) \qquad \frac{\partial \mathfrak{f}^{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \mathfrak{s}^\alpha$$

bleibt auch vom Standpunkt der Weylschen Geometrie aus seine physikalische Bedeutung erhalten, weil es auch hier allgemein kovariant ist[22]). Nach der Berechnung der g_{ik} und φ_i liefert daher noch (11) den Strom $\mathfrak{s}^\alpha$ und ermöglicht so insbesondere die Bestimmung der Elektrizitätsverteilung im Elektron oder Atomkern, wie es die Lösung des Problems der Materie verlangt.

§ 6.

Weyls Geometrie im statischen kugelsymmetrischen Felde.

Um die Ausführung der Berechnung der materiellen Elementarteilchen vorzubereiten, sollen nun die notwendigen Formeln des statischen kugelsymmetrischen Feldes für die Riemannsche Geometrie und sodann auch für die Weylsche Geometrie angegeben werden[23]).

Das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k, \qquad g_{ik} = g_{ki},$$

hat in diesem Falle bei Verwendung Cartesischer Koordinaten die Form

$$(40) \quad ds^2 = q^2 dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - p(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2,$$

[22]) H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie", 3. Aufl., S. 115.

[23]) Man vergleiche hierzu H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie", 3. Aufl., § 28 und 30; sowie W. Pauli, a. a. O., § 4.

wobei p und q allein von der Entfernung

(41) $$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

abhängen. Für die kovarianten Komponenten g_{ik} und die kontravarianten Komponenten g^{ik} des Schweretensors gilt dann:

(42) $$\begin{cases} g_{ik} = -(\delta_i^k + p x_i x_k), \\ g_{i0} = 0, \quad g_{00} = q^2 \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

(43) $$\begin{cases} g^{ik} = -\left(\delta_i^k - \frac{p}{h^2} x_i x_k\right), \\ g^{i0} = 0, \quad g^{00} = \frac{1}{q^2} \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

wobei

(44) $$h^2 = 1 + p r^2.$$

Für die Determinante „$-g$" des Schweretensors gilt:

(45) $$g = h^2 q^2 = (1 + p r^2) q^2;$$

es ist dann:

(46) $$\Delta = \sqrt{g} = h q.$$

Die Christoffelschen Dreizeigerausdrücke *erster* Art

(47) $$\begin{bmatrix} i\,k \\ s \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_s}\right)$$

nehmen folgende Werte an, wobei der Akzent die Ableitung nach r bedeutet:

(48) $$\begin{cases} \begin{bmatrix} i\,k \\ s \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{p'}{r} x_i x_k x_s - p \cdot \delta_i^k x_s, \\ \begin{bmatrix} i\,0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,i \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{q q'}{r} \cdot x_i, \quad \begin{bmatrix} 0\,0 \\ s \end{bmatrix} = -\frac{q q'}{r} \cdot x_s, \\ \begin{bmatrix} i\,k \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} i\,0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\,i \\ s \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \\ \qquad (i, k, s = 1, 2, 3) \end{cases}$$

Die Christoffelschen Dreizeiger-Ausdrücke *zweiter* Art

(49) $$\begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} = g^{st} \begin{bmatrix} i\,k \\ t \end{bmatrix}$$

werden hier:

(50) $$\begin{cases} \begin{Bmatrix} i\,k \\ s \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{p'}{r h^2} x_i x_k x_s + \frac{p}{h^2} \cdot \delta_i^k x_s, \\ \begin{Bmatrix} i\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\,i \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{q'}{r q} \cdot x_i, \quad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ s \end{Bmatrix} = \frac{q q'}{r h^2} \cdot x_s, \\ \begin{Bmatrix} i\,k \\ 0 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} i\,0 \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0\,i \\ s \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 0\,0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0 \\ \qquad (i, k, s = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Für die kovarianten Komponenten R_{ik} des Riemannschen Krümmungstensors 2. Ranges

$$(2)\qquad \begin{cases} R_{ik} = \dfrac{\partial \left\{ {ik \atop s} \right\}}{\partial x_s} - \dfrac{\partial \left\{ {is \atop s} \right\}}{\partial x_k} + \left\{ {ik \atop s} \right\} \left\{ {st \atop t} \right\} - \left\{ {is \atop t} \right\} \left\{ {kt \atop s} \right\}, \\ R_{ik} = R_{ki} \end{cases}$$

erhält man:

$$(51)\qquad \begin{cases} R_{ik} = \dfrac{x_i x_k}{r^2} \cdot \left(\dfrac{1}{r^2 h^2} - \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2h'}{rh} - \dfrac{h'}{rh^3} + \dfrac{h' q'}{hq} + \dfrac{q'}{rh^2 q} - \dfrac{q''}{q} \right) \\ \qquad + \delta_i^k \cdot \left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r^2 h^2} + \dfrac{h'}{rh^3} - \dfrac{q'}{rh^2 q} \right), \\ R_{i0} = R_{0i} = 0, \qquad R_{00} = 2\dfrac{qq'}{rh^2} + \dfrac{qq''}{h^2} - \dfrac{qq'h'}{h^3} \\ \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Für die kovarianten Komponenten φ_i des elektromagnetischen Viererpotentials gilt im statisch-kugelsymmetrischen Falle:

$$(52)\qquad \varphi_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3; \qquad \varphi_0 = \varphi,$$

wo φ allein von r abhängt.

Die kontravarianten Komponenten

$$(22\text{a})\qquad \varphi^i = g^{ik} \varphi_k$$

dieses Potentials werden:

$$(53)\qquad \varphi^i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3; \qquad \varphi^0 = \frac{\varphi}{q^2}.$$

Der zugehörige Skalar ist:

$$(54)\qquad (\varphi_s \varphi^s) = \frac{\varphi^2}{q^2}.$$

Für die Divergenz

$$(29)\qquad \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, \varphi^i)}{\partial x_i}$$

folgt:

$$(55)\qquad \Phi = 0.$$

Für den symmetrischen Ableitungsausdruck

$$(28)\qquad \Psi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) - \left\{ {ik \atop s} \right\} \varphi_s$$

ergibt sich:

$$\Psi_{ik} = -\left\{ {ik \atop 0} \right\} \varphi, \qquad \Psi_{i0} = \Psi_{0i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \left\{ {i0 \atop 0} \right\} \varphi,$$

$$\Psi_{00} = -\left\{ {00 \atop 0} \right\} \varphi \qquad\qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

oder ganz ausgerechnet:

$$(56)\qquad \begin{cases} \Psi_{ik}=0, \quad \Psi_{i0}=\Psi_{0i}=\frac{x_i}{r}\left(\frac{\varphi'}{2}-\frac{q'}{q}\cdot\varphi\right), \\ \Psi_{00}=0 \qquad\qquad (i,k=1,2,3). \end{cases}$$

Die kovarianten Komponenten Q_{ik} des symmetrischen Weylschen Krümmungstensors 2. Ranges

$$(27)\qquad Q_{ik}=R_{ik}-\Psi_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}\,\Phi+\frac{1}{2}\varphi_i\varphi_k-\frac{1}{2}g_{ik}(\varphi_s\varphi^s)$$

werden hier:

$$Q_{ik}=R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}(\varphi_s\varphi^s), \qquad Q_{i0}=Q_{0i}=-\Psi_{i0},$$

$$Q_{00}=R_{00}+\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi^2=R_{00} \qquad (i,k=1,2,3),$$

so daß die Ausrechnung ergibt:

$$(57)\qquad \begin{cases} Q_{ik}=R_{ik}+(\delta_i^k+p\,x_i x_k)\cdot\frac{\varphi^2}{2q^2}, \\ Q_{i0}=\frac{x_i}{r}\cdot\left(\frac{q'}{q}\cdot\varphi-\frac{\varphi'}{2}\right), \\ Q_{00}=R_{00} \qquad\qquad (i,k=1,2,3). \end{cases}$$

Von der räumlichen Kugelsymmetrie werde jetzt ein noch weiter gehender Gebrauch gemacht, indem die in Betracht kommenden Tensorkomponenten für den Punkt

$$P_0=(x_1=r,\; x_2=x_3=0)$$

gebildet werden sollen; falls die Ausdrücke, die nun Funktionen von r allein werden, sich hierdurch vereinfachen, sollen sie durch eckige Klammern gekennzeichnet werden.

Die g_{ik} werden:

$$(58)\qquad \begin{cases} g_{00}=q^2, \quad [g_{11}]=-h^2, \quad [g_{22}]=[g_{33}]=-1, \\ g_{i0}=0, \quad [g_{ik}]=0 \qquad\qquad (i\neq k;\; i,k=1,2,3). \end{cases}$$

Die g^{ik} gehen über in:

$$(59)\qquad \begin{cases} g^{00}=\frac{1}{q^2}, \quad [g^{11}]=-\frac{1}{h^2}, \quad [g^{22}]=[g^{33}]=-1, \\ g^{i0}=0, \quad [g^{ik}]=0 \qquad\qquad (i\neq k;\; i,k=1,2,3). \end{cases}$$

Das Linienelement genügt also hier der Gleichung

$$(60)\qquad [ds^2]=q^2dx_0^2-h^2dx_1^2-dx_2^2-dx_3^2.$$

Die R_{ik} verwandeln sich in:

$$
(61)\qquad \begin{cases}
R_{00} = 2\dfrac{qq'}{rh^2} + \dfrac{qq''}{h^2} - \dfrac{qq'h'}{h^3}, \\[2mm]
[R_{11}] = 2\dfrac{h'}{rh} + \dfrac{h'q'}{hq} - \dfrac{q''}{q}, \\[2mm]
[R_{22}] = [R_{33}] = \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{r^2h^2} + \dfrac{h'}{rh^3} - \dfrac{q'}{rh^2q}, \\[2mm]
R_{i0} = R_{0i} = 0, \quad [R_{ik}] = 0 \qquad (i \neq k;\ i,k = 1,2,3).
\end{cases}
$$

Die Q_{ik} gehen über in:

$$
(62)\qquad \begin{cases}
Q_{00} = R_{00}, \quad [Q_{11}] = [R_{11}] + \dfrac{h^2\varphi^2}{2q^2}, \\[2mm]
[Q_{22}] = [Q_{33}] = [R_{22}] + \dfrac{\varphi^2}{2q^2}, \\[2mm]
[Q_{10}] = [Q_{01}] = \dfrac{q'}{q}\varphi - \dfrac{\varphi'}{2}, \\[2mm]
[Q_{20}] = [Q_{02}] = 0, \quad [Q_{30}] = [Q_{03}] = 0, \\[1mm]
[Q_{ik}] = 0 \qquad (i \neq k;\ i,k = 1,2,3).
\end{cases}
$$

Jetzt findet man leicht den Wert des Riemannschen Krümmungsskalars R, nämlich gemäß (3)

$$R = g^{ik}R_{ik} = [g^{ik}][R_{ik}],$$

oder ausgerechnet:

$$
(63)\qquad R = 4\frac{q'}{rh^2q} + 2\frac{q''}{h^2q} - 2\frac{h'q'}{h^3q} - 4\frac{h'}{rh^3} - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2h^2}.
$$

Für den Weylschen Krümmungsskalar $F = Q$, für den die frühere Gleichung gilt:

$$
(30)\qquad Q = R - 3\,\Phi - \frac{3}{2}(\varphi_s \varphi^s),
$$

erhält man:

$$
(64)\qquad Q = R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}.
$$

Für die kovarianten Komponenten f_{ik} des elektromagnetischen Feldes

$$
(19)\qquad f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}, \quad f_{ki} = -f_{ik},
$$

folgt hier:

$$
(65)\qquad \begin{cases}
f_{0k} = \varphi' \cdot \dfrac{x_k}{r}, \quad f_{k0} = -f_{0k} \qquad (\text{für } k = 1,2,3), \\[2mm]
\text{alle anderen } f_{ik} \text{ gleich } 0.
\end{cases}
$$

Die kontravarianten Komponenten

$$
(6)\qquad f^{ik} = g^{is}g^{kt}f_{st}
$$

werden:

$$
(66)\qquad \begin{cases} f^{0k} = -\dfrac{\varphi'}{h^2 q^2}\cdot\dfrac{x_k}{r}, \quad f^{k0} = -f^{0k} \qquad (\text{für } k = 1, 2, 3), \\ \text{alle anderen } f^{ik} \text{ gleich } 0. \end{cases}
$$

An der Stelle P_0 gilt:

$$
(67)\qquad [f_{01}] = \varphi' = -[f_{10}]; \quad \text{alle anderen } [f_{ik}] \text{ gleich } 0;
$$

$$
(68)\qquad [f^{01}] = -\frac{\varphi'}{h^2 q^2} = -[f^{10}]; \quad \text{alle anderen } [f^{ik}] \text{ gleich } 0.
$$

Die kovarianten Komponenten S_{ik} des Maxwell-Lorentzschen Energietensors

$$
(5)\qquad S_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} f_{\alpha\beta} f^{\alpha\beta} - f_{i\alpha} f_{k\beta} g^{\alpha\beta}
$$

haben für P_0 die Werte:

$$
(69)\qquad \begin{cases} S_{00} = \dfrac{\varphi'^2}{2h^2}, \quad [S_{11}] = -\dfrac{\varphi'^2}{2q^2}, \\ [S_{22}] = [S_{33}] = \dfrac{\varphi'^2}{2h^2 q^2}, \quad S_{i0} = 0 \qquad (\text{für } i = 1, 2, 3), \\ \text{alle anderen } [S_{ik}] \text{ gleich } 0. \end{cases}
$$

Damit stehen nun die notwendigen geometrischen Formeln des statischen kugelsymmetrischen Feldes bereit.

§ 7.

Das materielle Elementarteilchen nach der verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichung.

Es soll jetzt die mit Hilfe der Weylschen Geometrie verallgemeinerte skalarfreie Feldgleichung Einsteins

$$
(36)\qquad Q_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} Q = \varkappa \frac{S_{ik}}{Q}
$$

auf das materielle Elementarteilchen angewandt und ihre Integration für das bei diesem in Betracht kommende statische kugelsymmetrische Feld in Angriff genommen werden. Dabei genügt es, die Gleichungen für den Punkt P_0 anzusetzen. Nach (58), (62) und (69) bleiben dann allein die folgenden vier Gleichungen übrig:

$$
(70)\qquad \begin{cases} Q_{00} - \dfrac{1}{4} q^2 Q = \varkappa \dfrac{S_{00}}{Q}, \\ [Q_{11}] + \dfrac{1}{4} h^2 Q = \varkappa \dfrac{[S_{11}]}{Q}, \\ [Q_{22}] + \dfrac{1}{4} Q \quad = \varkappa \dfrac{[S_{22}]}{Q}, \\ [Q_{10}] \qquad\quad = 0. \end{cases}
$$

Dabei ist die $[Q_{33}]$ betreffende Gleichung sogleich weggelassen worden, da sie mit der auf $[Q_{22}]$ bezüglichen, von der Bezeichnungsweise abgesehen, identisch ist. Wegen der Skalarfreiheit von (36) sind die drei ersten Gleichungen (allein diese!) von (70) nur gleichwertig mit zwei unabhängigen Gleichungen. Daher genügt das System (70) gerade zur Bestimmung der drei unbekannten Funktionen h, q, φ von r; durch h ist dann gemäß (44) auch p bestimmt. Dagegen ist es im statischen kugelsymmetrischen Falle nicht möglich, die Eichung noch besonders durch die Bedingung $Q = \text{konst.}$ festzulegen, da die Aufgabe sonst überbestimmt wäre (vgl. § 3 am Ende).

Gemäß (62) und (64) führe man jetzt die Riemannschen Krümmungsgrößen in (70) ein; so folgt:

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} & R_{00} - \frac{1}{4} q^2 \left(R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}\right) && = \frac{\varkappa S_{00}}{R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}}, \\ & [R_{11}] + \frac{h^2 \varphi^2}{2 q^2} + \frac{1}{4} h^2 \left(R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}\right) && = \frac{\varkappa [S_{11}]}{R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}}, \\ & [R_{22}] + \frac{\varphi^2}{2 q^2} + \frac{1}{4}\left(R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}\right) && = \frac{\varkappa [S_{22}]}{R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}}, \\ & [Q_{10}] \equiv \frac{q'}{q}\varphi - \frac{\varphi'}{2} && = 0. \end{aligned}\right.$$

Wichtig ist das Auftreten der vierten Gleichung in (71). Im Falle der Benutzung der ursprünglichen skalarfreien Feldgleichung (16) geht sie, da nach (61)

$$R_{10} = 0$$

ist, in die Identität

$$0 = 0$$

über, und daher wird dann dort, da für drei Unbekannte nur zwei unabhängige Gleichungen vorliegen, die Aufgabe des Elektrons oder Atomkerns unbestimmt, wie schon oben (§ 1 und 2) angegeben.

Aus dieser vierten Gleichung von (71) erhält man durch Integration

$$(72)\qquad \varphi = \beta q^2,$$

wo β eine Integrationskonstante ist. Daher kann man nun aus den drei ersten Gleichungen von (71) die Funktion φ beseitigen und bekommt in Rücksicht auf (69):

$$
(73)\quad\begin{cases}
R_{00}-\frac{1}{4}q^2R+\frac{3}{8}\beta^2q^4=2\varkappa\beta^2\cdot\frac{q^2q'^2}{h^2\left(R-\frac{3}{2}\beta^2q^2\right)},\\[1ex]
[R_{11}]+\frac{1}{4}h^2R+\frac{1}{8}\beta^2h^2q^2=-2\varkappa\beta^2\cdot\frac{q'^2}{R-\frac{3}{2}\beta^2q^2},\\[1ex]
[R_{22}]+\frac{1}{4}R+\frac{1}{8}\beta^2q^2=2\varkappa\beta^2\cdot\frac{q'^2}{h^2\left(R-\frac{3}{2}\beta^2q^2\right)}.
\end{cases}
$$

Um eine leicht integrierbare Gleichung zu erhalten, multipliziere man jetzt die zweite dieser Gleichungen mit $\frac{q^2}{h^2}$ und addiere dann die erste hinzu; so ergibt sich:

$$
(74)\qquad R_{00}+\frac{q^2}{h^2}\cdot[R_{11}]+\frac{1}{2}\beta^2q^4=0.
$$

Gemäß (61) geht diese Gleichung über in:

$$
2\frac{qq'}{rh^2}+2\frac{h'q^2}{rh^3}+\frac{1}{2}\beta^2q^4=0,
$$

oder nach Division mit q, das seiner Bedeutung nach nicht Null sein kann, in:

$$
hq'+h'q+\frac{1}{4}\beta^2h^3q^3r=0.
$$

Führt man hierin gemäß

$$
(46)\qquad hq=\varDelta
$$

die Funktion $\varDelta$ ein, so folgt:

$$
\varDelta'+\frac{1}{4}\beta^2\varDelta^3r=0.
$$

Durch Integration erhält man nun:

$$
(75)\qquad \varDelta=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2r^2+\gamma}},
$$

wobei γ eine Integrationskonstante ist; dabei ist die Quadratwurzel nach der früheren Definition $\varDelta=\sqrt{g}$ mit dem positiven Zeichen zu nehmen.

Wegen der *hyperbolischen* Beschaffenheit der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit muß $\varDelta^2=g$ überall positiv sein. Da nun aus (75) für $r=0$ folgt:

$$
\varDelta^2=\frac{1}{\gamma},
$$

so muß γ *positiv* sein; dann ist $\varDelta$ an allen Orten positiv.

Zu beachten ist ferner, daß $\varDelta^2=g$ wegen der *allgemeinen* Beschaffenheit der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit auch nirgends Null werden darf.

In dem Sonderfalle des von Einstein und Schwarzschild behandelten gewöhnlichen Massenpunktes, wo $\varDelta^2 = c^2$ konstant ist, tritt dies auch nicht ein. Wohl aber wird gemäß (75) für $r = \infty$ hier $\varDelta^2 = 0$. Daraus läßt sich schließen, daß r nicht unbegrenzt wachsen, sondern einen Höchstwert r_0, den *Äquatorradius*, nicht überschreiten darf. Der dreidimensionale Raum des Elektrons oder Atomkerns ist also als geschlossen anzunehmen, ähnlich wie der Raum der von Schwarzschild behandelten Flüssigkeitskugel.

Nunmehr soll die dritte Gleichung von (73) behandelt werden. Wegen (61) und (63) nimmt sie diese entwickelte Gestalt an:

$$(76)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2r^2} - \frac{1}{2r^2h^2} + \frac{q''}{2h^2q} - \frac{h'q'}{2h^3q} + \frac{\beta^2}{8}q^2\right) \\ &\cdot\left(4\frac{q'}{rq} + 2\frac{q''}{q} - 2\frac{h'q'}{hq} - 4\frac{h'}{rh} - 2\frac{h^2}{r^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{2}\beta^2h^2q^2\right) = 2\varkappa\beta^2q'^2. \end{aligned}\right.$$

Setzt man jetzt nach (46)

$$h = \frac{\varDelta}{q},$$

so folgt:

$$(77)\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2r^2} - \frac{q^2}{2r^2\varDelta^2} + \frac{qq''}{2\varDelta^2} - \left(\frac{\varDelta'}{\varDelta} - \frac{q'}{q}\right)\cdot\frac{qq'}{2\varDelta^2} + \frac{\beta^2}{8}q^2\right) \\ &\cdot\left(4\frac{q'}{rq} + 2\frac{q''}{q} - 2\cdot\left(\frac{\varDelta'}{\varDelta} - \frac{q'}{q}\right)\cdot\left(\frac{q'}{q} + \frac{2}{r}\right) - 2\frac{\varDelta^2}{r^2q^2} + \frac{2}{r^2} - \frac{3}{2}\beta^2\varDelta^2\right) \\ &= 2\varkappa\beta^2q'^2. \end{aligned}\right.$$

Hierin hat man $\varDelta^2$ und $\frac{\varDelta'}{\varDelta}$ gemäß (75) als bekannte Funktionen von r anzusehen:

$$(77\text{a})\left\{\begin{aligned} \varDelta^2 &= \frac{1}{\frac{1}{4}\beta^2r^2 + \gamma}, \\ \frac{\varDelta'}{\varDelta} &= -\frac{\frac{1}{4}\beta^2r}{\frac{1}{4}\beta^2r^2 + \gamma}. \end{aligned}\right.$$

Dann stellt (77) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für q dar. Sie ist nicht linear und überhaupt von ziemlich verwickeltem Bau. Für ihre Integration käme daher wohl nur die Methode der Reihenentwicklung in Betracht; doch soll hier auf die Durchführung einer solchen Rechnung verzichtet werden.

Hat man nun q, die veränderliche Lichtgeschwindigkeit, aus (77) als Funktion von r ermittelt, in der noch zwei neue Integrationskonstanten auftreten, so folgt nach (46) und (75):

(78) $$h^2 = \frac{1}{q^2\left(\frac{1}{4}\beta^2 r^2 + \gamma\right)},$$

sodann nach (44) und (78):

(79) $$p = \frac{1}{q^2 r^2\left(\frac{1}{4}\beta^2 r^2 + \gamma\right)} - \frac{1}{r^2},$$

wozu noch das elektrische Potential tritt:

(72) $$\varphi = \beta q^2.$$

Damit wäre das Schwerefeld sowie das elektrische Feld des ruhenden zentrisch symmetrischen Elementarteilchens der Materie bekannt. Da in den zugehörigen Formeln im ganzen vier Integrationskonstanten auftreten, so sind außer dem negativen Elektron und dem positiven Wasserstoffkern (oder falls auch dieser zusammengesetzt sein sollte, dem positiven Elementarkern) noch unendlich viele andere materielle Elementarteilchen möglich. Die erforderliche Einschränkung der Möglichkeiten dürfte wohl nur durch ein neues Prinzip, vielleicht die *Quantentheorie*, erreicht werden. Da die Integrationskonstante β in den die Gravitationspotentiale p und q bestimmenden Gleichungen (77), (77a) und (79) stets im Quadrat auftritt, während das elektrische Potential φ nach (72) zu β selbst proportional ist, so erkennt man, daß zu jedem durch p, q, φ definierten etwa positiv elektrischen Massenteilchen ein entsprechendes durch $p, q, -\varphi$ definiertes negativ elektrisches Massenteilchen möglich ist, falls nicht weitere Bedingungen hinzutreten.

Jetzt möge die elektrische Ladungsdichte ϱ des Massenteilchens berechnet werden. Nach der ersten Maxwellschen Gleichung

(11) $$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i$$

und der in (10) gegebenen Erklärung von ϱ folgt:

(80) $$\varrho = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} f^{0k})}{\partial x_k}.$$

Im kugelsymmetrischen Fall ist also:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{d(\sqrt{g} f^{0k})}{dr} \cdot \frac{x_k}{r}.$$

Bezieht man jetzt die Rechnung auf P_0 und beachtet (68) und (46), so erhält man:

(81) $$\varrho = -\frac{1}{hq}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi'}{hq}\right),$$

und nach (72), (46) und (75) folgt endlich:

$$\varrho = -2\beta\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 r^2 + \gamma}\cdot\frac{d}{dr}\left(q q'\sqrt{\frac{1}{4}\beta^2 r^2 + \gamma}\right). \tag{82}$$

Damit ist ϱ als Funktion der Lichtgeschwindigkeit q, die durch (77) festgelegt ist, dargestellt.

Schließlich möge noch bemerkt werden, daß die von Schwarzschild[24]) für den gewöhnlichen Massenpunkt gegebene Lösung

$$q^2 = c^2 - \frac{\alpha}{r}, \quad h^2 = \frac{c^2}{q^2}, \quad p = \frac{h^2 - 1}{r^2}, \tag{83}$$

wo c die konstante Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und α eine Integrationskonstante ist, in der oben aufgestellten allgemeinen Lösung als Sonderfall enthalten ist. Sie entspricht folgenden Werten der Integrationskonstanten:

$$\beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{c^2}. \tag{84}$$

Der Massenpunkt ist dann ungeladen:

$$\varphi = 0, \quad \varrho = 0, \tag{85}$$

und die (77) und (77a) entsprechende Feldgleichung für q lautet

$$q q'' + q'^2 - \frac{q^2}{r^2} + \frac{c^2}{r^2} = 0 \tag{86}$$

und ist in der angegebenen Weise geschlossen integrierbar.

II. Hauptteil.

Die Materie nach dem Hamiltonschen Prinzip unter Benutzung der Weylschen Geometrie.

§ 8.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung und Weyls Geometrie.

Während die im ersten Hauptteil entwickelte Theorie der Materie auf einem weitgehend induktiven Gedankengange beruhte, indem die Einsteinschen skalarfreien Feldgleichungen den Begriffen und Forderungen der *Weylschen Geometrie* angepaßt wurden, soll jetzt der wesentlich deduktive Weg der eigentlichen *Weylschen Physik* beschritten werden. In dieser bildet die Annahme die Grundlage, daß sich sämtliche physikalische Grundgesetze aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung und zwar genauer

---

[24]) K. Schwarzschild, Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916, S. 189 bis 196. Vgl. auch H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie“, 3. Aufl., § 30.

aus der von Hamilton herrührenden Form desselben ableiten lassen. Auf diese Anschauung, die auf H. v. Helmholtz und J. J. Thomson zurückgeht, hatten bereits M. Planck seine allgemeine Dynamik und, wie schon erwähnt, Mie, sowie im Anschluß an ihn Hilbert, ihre Theorie der Materie begründet. Dagegen hat sich Einstein weder bei der Auffindung seiner Feldgleichungen der Gravitation im Jahre 1915 noch bei der Aufstellung der veränderten Gleichungen des Jahres 1919 von diesem Prinzip leiten lassen, wenn er sich auch im Jahre 1916 ausführlich mit dem Verhältnis desselben zu seinen Feldgleichungen auseinandergesetzt hat. Auch sei darauf hingewiesen, daß die von G. Nordström 1913 geschaffene Theorie der Gravitation dem Wirkungsprinzip nicht gehorcht[25]). Eine unbedingte Notwendigkeit, dasselbe zugrunde zu legen, besteht also nicht.

Macht man nun von dem Hamiltonschen Prinzip Gebrauch, so muß in der Weylschen Physik das Wirkungsintegral allein mittels der Zustandsfunktionen g_{ik} und φ_i derart gebildet sein, daß es eine absolute Invariante gegenüber einer beliebigen Änderung der Koordinaten und der Eichung ist. Jedoch genügt auch diese Forderung noch nicht zur Ermittelung der Naturgesetze; vielmehr muß man, um die Zahl der Möglichkeiten einzuschränken, noch die Voraussetzung eines *einfachen mathematischen Baues* der Wirkungsfunktion hinzufügen[26]). Von großer Bedeutung ist es nun, daß Weitzenböck[27]) für die Weylsche Physik die Wirkungsfunktionen von einer gewissen einfachen rationalen Bauart vollzählig ermittelt hat. Sehr wesentlich ist es ferner, daß man allein unter der Voraussetzung, daß die Wirkungsfunktion außer den g_{ik} selbst ihre Ableitungen nur in der 1. und 2. Ordnung und außer den φ_i selbst nur ihre Ableitungen 1. Ordnung enthält, aus der Koordinateninvarianz des Wirkungsintegrals das Bestehen der vier Erhaltungssätze von Energie und Impuls und aus der Eichinvarianz den Erhaltungssatz der Elektrizität folgern kann — und dies alles also, ohne eine bestimmte Wirkungsfunktion anzunehmen. Daß überhaupt fünf Identitäten zwischen den gewonnenen Feldgleichungen auftreten müssen, ist dabei natürlich einfach die Folge des Umstandes, daß infolge der verlangten Invarianzeigenschaften stets fünf der gesuchten Funktionen g_{ik}, φ_i willkürlich bleiben müssen, entsprechend dem von fünf willkürlichen Funktionen abhängenden Übergang zu einem neuen Bezugssystem (d. i. Vereinigung von Koordinatensystem und Eichung). Bemerkenswert ist aber die physikalisch bedeutungsvolle Form jener Identitäten; sie bildet für die Anwendung des Wirkungsprinzips eine starke Stütze.

---

[25]) Vgl. G. Mie, Festschrift für Elster und Geitel, S. 254 u. 255.

[26]) H. Weyl, Phys. Zschr. 21 (1920), S. 650.

[27]) R. Weitzenböck a. a. O.

Jetzt sollen die wichtigsten allgemeinen Gleichungen der Weylschen Physik, soweit sie für die nachfolgende Anwendung auf die Theorie der Materie wesentlich sind, angegeben werden.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt, daß die Gleichung

$$(87) \qquad \delta \int \mathfrak{W}\, dx = 0, \qquad dx = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

für alle Variationen δg_{ik}, $\delta \varphi_i$ gilt, die an der Grenze des Integrationsgebietes verschwinden. Dabei ist $\mathfrak{W}$ eine eichinvariante skalare Dichte (oder ein V-Skalar), die Wirkungsdichte.

Führt man die Variation in (87) aus und beseitigt dann durch partielle Integration und Berücksichtigung der Grenzbedingungen die Variationen der Ableitungen der g_{ik} und φ_i, geht also zu den sogenannten Lagrangeschen Ableitungen über, so erhält man:

$$(88) \qquad \int \left(\frac{1}{2}\mathfrak{W}^{ik}\delta g_{ik} + \mathfrak{w}^i \delta\varphi_i\right) dx = 0, \qquad \mathfrak{W}^{ik} = \mathfrak{W}^{ki}.$$

Hieraus ergeben sich die zehn Gleichungen des Schwerefeldes

$$(89) \qquad \mathfrak{W}^{ik} = 0$$

und die vier Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

$$(90) \qquad \mathfrak{w}^i = 0.$$

Wie schon früher ausgeführt, lassen sich die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen vom Standpunkte der Weylschen Relativitätstheorie aus rein geometrisch auffassen, und auch die Wirkungsdichte $\mathfrak{l}$ der Maxwellschen Theorie hat daher eine einfache geometrische Bedeutung, nämlich die der skalaren Dichte der Streckenkrümmung:

$$(91) \qquad \mathfrak{l} = \frac{1}{4} f_{ik}\mathfrak{f}^{ik}.$$

Aus ihr folgt:

$$(92) \qquad \delta\int \mathfrak{l}\, dx \equiv \int\left(\frac{1}{2}\mathfrak{S}^{ik}\delta g_{ik} + \frac{\partial \mathfrak{f}^{ki}}{\partial x_k}\delta\varphi_i\right) dx, \qquad \mathfrak{S}^{ik} = \mathfrak{S}^{ki}.$$

Dabei ist im Einklange mit (5):

$$(93) \qquad \mathfrak{S}_i^k = \delta_i^k \mathfrak{l} - f_{i\alpha}\mathfrak{f}^{k\alpha}.$$

Diese Wirkungsdichte $\mathfrak{l}$ muß nun in $\mathfrak{W}$ als Bestandteil enthalten sein, so daß man schreiben darf:

$$(94) \qquad \mathfrak{W} = \mathfrak{V} + \mathfrak{l}.$$

Es sei ferner entsprechend zu (88):

$$(95) \qquad \delta\int \mathfrak{V}\, dx \equiv \int\left(\frac{1}{2}\mathfrak{V}^{ik}\delta g_{ik} + \mathfrak{s}^i\delta\varphi_i\right) dx, \qquad \mathfrak{V}^{ik} = \mathfrak{V}^{ki}.$$

Dann folgen für die durch (94) erklärte Wirkungsdichte $\mathfrak{W}$ an Stelle von (89) und (90) die 14 Feldgleichungen:

$$\mathfrak{W}^{ik} = -\mathfrak{S}^{ik}, \tag{96}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{f}^{ik}}{\partial x_k} = \mathfrak{s}^i. \tag{97}$$

Wegen der oben erwähnten zwischen den Feldgleichungen bestehenden fünf Identitäten sind nur neun von den 14 Gleichungen (96) und (97) unabhängig. Wählt man also etwa neun von den Gravitationsgleichungen (96) aus, so bilden dieselben das vollkommene *Gegenstück zu den* im ersten Hauptabschnitt gewonnenen *verallgemeinerten skalarfreien Feldgleichungen*:

$$QQ_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik} Q^2 = \varkappa S_{ik}. \tag{36}$$

Die elektromagnetischen Gleichungen (97), die den Viererstrom bestimmen, fallen mit (11) zusammen und bilden das erste Gleichungssystem Maxwells. Das zweite System Maxwells, das durch (8) gegeben wird, stellt bei Benutzung des Viererpotentials φ_i als Grundgröße eine bloße Identität dar und darf daher hier weggelassen werden, wie schon am Ende von § 2 bemerkt wurde.

§ 9.

Abschluß der Erörterung der Weylschen Krümmungsgrößen und die Auswahl der Wirkungsfunktionen.

Bevor zu der Aufstellung bestimmter Wirkungsfunktionen übergegangen wird, müssen die in § 4 gegebenen Ausführungen über die Krümmungsgrößen der Weylschen Geometrie noch etwas erweitert werden.

Der allgemeinste Krümmungstensor 4. Ranges ist die schon oben erwähnte Vektorkrümmung F^i_{klm}, die durch folgende Gleichung erklärt wird:

$$F^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x_m} + \Gamma^r_{km}\Gamma^i_{rl} - \Gamma^r_{kl}\Gamma^i_{rm}. \tag{98}$$

Ein Gegenstück ist der schon oft benutzte schiefsymmetrische Tensor 2. Ranges f_{ik}, die Streckenkrümmung, die allein aus den φ_i gebildet ist:

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}. \tag{19}$$

Die Streckenkrümmung ist in der Vektorkrümmung als Bestandteil enthalten; bei der entsprechenden Zerlegung spaltet sich außerdem die bereits in § 5 erwähnte Richtungskrümmung $^*F^i_{klm}$ ab gemäß der Gleichung:

$$F^i_{klm} = {}^*F^i_{klm} - \frac{1}{2}\delta^i_k f_{lm}. \tag{99}$$

Von der Richtungskrümmung läßt sich wieder eine besondere Krümmung 4. Ranges Q_{iklm} abtrennen, die dieselben Symmetrie-Eigenschaften wie der Riemannsche Krümmungstensor R_{iklm} hat[28]):

(100) $${}^*F_{iklm} = Q_{iklm} - \frac{1}{4}(g_{il} f_{km} + g_{km} f_{il} - g_{im} f_{kl} - g_{kl} f_{im}).$$

Im Anschluß an (23) und (24) erklärt man dann weiter die folgenden Krümmungstensoren 2. Ranges und linearen Krümmungsskalare:

(101) $$F_{ik} = F^{a}_{iak}, \quad {}^*F_{ik} = {}^*F^{a}_{iak}, \quad Q_{ik} = Q^{a}_{iak},$$

(102) $$F = g^{ik} F_{ik}, \quad {}^*F = g^{ik}\,{}^*F_{ik}, \quad Q = g^{ik} Q_{ik}.$$

Dabei zeigt sich, daß Q_{ik} und Q mit den in (25) und (26) eingeführten Größen identisch sind. In Erweiterung von (31) und (26) gilt ferner:

(103) $$F_{ik} = {}^*F_{ik} - \frac{1}{2} f_{ik} = Q_{ik} - f_{ik},$$

(104) $$F = {}^*F = Q.$$

Der Tensor Q_{ik} ist symmetrisch, während F_{ik} und ${}^*F_{ik}$ diese Eigenschaft im Einklang mit (103) nicht haben.

Endlich seien noch die folgenden Beziehungen zwischen den quadratischen Krümmungsskalaren angegeben[29]):

(105) $$\begin{cases} F_{iklm} F^{iklm} = {}^*F_{iklm}\,{}^*F^{iklm} + f_{ik} f^{ik} \\ \qquad\qquad\quad = Q_{iklm} Q^{iklm} + \frac{3}{2} f_{ik} f^{ik}, \end{cases}$$

(106) $$\begin{cases} F_{ik} F^{ik} = {}^*F_{ik}\,{}^*F^{ik} + \frac{3}{4} f_{ik} f^{ik} \\ \qquad\qquad = Q_{ik} Q^{ik} + f_{ik} f^{ik}. \end{cases}$$

Nach diesen Vorbereitungen soll nun zur Auswahl der Wirkungsfunktionen geschritten werden.

Wie Weitzenböck[30]) bewiesen hat, muß die Wirkungsdichte $\mathfrak{W}$, falls sie eine Funktion der

(107) $$g_{ik}, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_a}, \quad \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_a \partial x_\beta}, \quad \varphi_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$$

sein soll, bei Benutzung der Weylschen Metrik eine Invariante der drei Tensoren

(108) $$g_{ik}, \quad f_{ik}, \quad {}^*F_{iklm}$$

---

[28]) W. Pauli, a. a. O.; R. Bach, a. a. O. Dort sehe man auch die hier nicht erforderlichen entwickelten Ausdrücke für ${}^*F_{iklm}$ und Q_{iklm}.

[29]) W. Pauli, a. a. O.

[30]) R. Weitzenböck, a. a. O.

sein. Daß hier die Richtungskrümmung ${}^*F_{iklm}$ auftritt und nicht die allgemeinere Vektorkrümmung F_{iklm}, erklärt sich unmittelbar aus (99). Macht man weiter die Annahme, daß $\mathfrak{W}$, falls man von einer als Faktor auftretenden Potenz g^m von auch nicht positivem und nicht ganzzahligem Exponenten absieht, eine ganze und rationale Funktion der Tensorkomponenten (108) sei, so läßt sich die Anzahl der möglichen Fälle sehr einschränken. Mit Hilfe der symbolischen Methode, wie sie zumal bei der Behandlung der Linienkomplexe üblich ist, gelang es Weitzenböck, alle möglichen Invarianten der angegebenen Art zu ermitteln und auch festzustellen, welche unter ihnen unabhängig sind. Es bleiben so schließlich allein sechs Wirkungsdichten $\mathfrak{W}$ übrig, die sämtlich das Koordinatengewicht 1 (als V-Skalare) und das Eichgewicht 0 haben. Von ihnen haben aber nur drei die Form:

$$\mathfrak{W} = W\sqrt{g}, \tag{109}$$

wo W von einer Potenz von g frei ist und die zugehörige skalare Wirkungsfunktion vom Koordinatengewicht 0 und vom Eichgewicht „-2“ darstellt. Die betreffenden drei Wirkungsfunktionen W sind:

$$\frac{1}{4} f_{ik} f^{ik} = l; \qquad F^2; \qquad \frac{1}{4} {}^*F_{iklm} {}^*F^{iklm} = {}^*L. \tag{110}$$

In diesem System kann man gemäß (105) die Invariante ${}^*L$ durch $Q_{iklm} Q^{iklm}$ ersetzen. Die Wirkungsfunktion $Q_{ik} Q^{ik}$ tritt hier nicht besonders auf, da sie von den übrigen Invarianten linear abhängt. Dieser Umstand ist im Einklang mit folgender von R. Bach[31]) abgeleiteten Identität:

$$\delta \int \left(Q_{iklm} Q^{iklm} - 4 Q_{ik} Q^{ik} + Q^2 + \frac{1}{2} f_{ik} f^{ik} \right) dx \equiv 0. \tag{111}$$

Man kann nun, was für die Rechnung vorzuziehen ist, statt (110) das System folgender Wirkungsfunktionen W nehmen:

$$\frac{1}{4} f_{ik} f^{ik} = l; \qquad Q^2; \qquad Q_{ik} Q^{ik}. \tag{112}$$

Von den drei andern von Weitzenböck ermittelten Wirkungsfunktionen haben zwei, die schiefsymmetrisch sind, das Koordinatengewicht 1 und das Eichgewicht 0 und die letzte die beiden Gewichte gleich 2; sie kommen hier nicht in Betracht. Insbesondere sind die beiden ersterwähnten schiefsymmetrischen Funktionen schon aus dem Grunde völlig unbrauchbar, weil die Variation der ihnen entsprechenden Wirkungsintegrale identisch verschwindet, wie R. Bach[32]) gezeigt hat.

---

[31]) R. Bach, a. a. O., Gl. (66).

[32]) R. Bach, a. a. O., S. 124 u. 125.

Daher ist unter den gemachten einschränkenden Annahmen in die Wirkungsdichte

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{B} + \mathfrak{l} \tag{94}$$

der Ausdruck

$$\mathfrak{B} = (\alpha\, Q_{ik} Q^{ik} + \beta\, Q^2)\sqrt{g} \tag{113}$$

einzuführen.

§ 10.

Das materielle Elementarteilchen nach Hamiltons Prinzip unter Benutzung von Weyls Geometrie, sowie abschließende Bemerkungen.

Unter Benutzung allein der Wirkungsfunktion Q^2 neben l sind die Differentialgleichungen des materiellen Elementarteilchens bereits von Weyl[33]) und Pauli[34]) aufgestellt worden. Zwischen den bei ihnen auftretenden Feldgleichungen der Schwere und den im ersten Hauptteil angewandten Feldgleichungen (36) besteht insofern einige Ähnlichkeit, als in den ersteren ebenfalls der Ausdruck

$$Q\left(Q_{ik} - \frac{1}{4} g_{ik}\, Q\right)$$

als additiver Bestandteil auftritt[35]).

Hier soll jetzt, um die Folgerungen aus der Weylschen Physik vollständig überblicken zu können, die allgemeinste durch (94) und (113) bestimmte Wirkungsdichte benutzt werden[36]), nämlich

$$\begin{cases} \mathfrak{W} = \alpha\, Q_{ik}\, Q^{ik} \sqrt{g} + \beta\, Q^2 \sqrt{g} + l \sqrt{g} \\ \quad = \alpha\, \mathfrak{B}_1 + \beta\, \mathfrak{B}_2 + \mathfrak{l}. \end{cases} \tag{114}$$

Geht man nun, um das Materieteilchen zu berechnen, zum statischen kugelsymmetrischen Fall über, so wird die Wirkungsdichte $\mathfrak{W}$ eine Funktion von r allein. Daher drücke man in der Variationsgleichung

$$\delta \iiiint \mathfrak{W}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 0 \tag{87}$$

das dreidimensionale Raumelement statt durch Kartesische Koordinaten

---

33) H. Weyl, Ann. d. Phys. (4) **59** (1919) a. a. O., und: „Raum, Zeit, Materie“, 4. Aufl., 1921.

34) W. Pauli, a. a. O.

35) W. Pauli, a. a. O., Gl. (49).

36) Für einen stark ausgearteten Sonderfall von (114) hat R. Bach, a. a. O. S. 130ff. und S. 134, Abschn. 5, das Elektron berechnet; die Integrationen waren dabei sämtlich durchführbar, und zwar mittels elliptischer Funktionen.

durch Polarkoordinaten aus, nämlich mittels des räumlichen Winkels Ω und r:

(115) $$dx_1\,dx_2\,dx_3 = r^2\,d\Omega\,dr.$$

Integriert man sodann nach der Zeit x_0 über eine feste Dauer und nach dem Raum über eine von zwei festen Kugelflächen begrenzte Schale, so bekommt man statt (87) folgende nur ein einfaches Integral enthaltende Variationsgleichung:

(116) $$\delta\int \mathfrak{W}\,r^2\,dr = 0.$$

Bezeichnet man die auf Polarkoordinaten transformierten Wirkungsdichten in dieser Weise:

(117) $$\mathfrak{U}_1 = r^2\,\mathfrak{B}_1, \qquad \mathfrak{U}_2 = r^2\,\mathfrak{B}_2, \qquad \mathfrak{u} = r^2\,\mathfrak{l},$$

so folgt aus (116) wegen (114) und (117):

(118) $$\alpha\cdot\delta\int \mathfrak{U}_1\,dr + \beta\cdot\delta\int \mathfrak{U}_2\,dr + \delta\int \mathfrak{u}\,dr = 0.$$

Variiert man hier die drei Funktionen q, h und φ, von denen die g_{ik} und φ_i gemäß § 6 abhängen, so erhält man die drei (96) und (97) entsprechenden Feldgleichungen der Schwere und der Elektrizität. Dieselben lassen sich formal sofort hinschreiben, wenn man die Lagrangesche Ableitung z. B. von $\mathfrak{U}_1$ nach q kurz so bezeichnet:

$$\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial q} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial q'}\right) + \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial q''}\right) \equiv L_q(\mathfrak{U}_1).$$

Die gewünschten aus (118) folgenden Feldgleichungen sind dann:

(119) $$\begin{cases} \alpha\cdot L_\varphi(\mathfrak{U}_1) + \beta\cdot L_\varphi(\mathfrak{U}_2) + L_\varphi(\mathfrak{u}) = 0, \\ \alpha\cdot L_h(\mathfrak{U}_1) + \beta\cdot L_h(\mathfrak{U}_2) + L_h(\mathfrak{u}) = 0, \\ \alpha\cdot L_q(\mathfrak{U}_1) + \beta\cdot L_q(\mathfrak{U}_2) + L_q(\mathfrak{u}) = 0. \end{cases}$$

Bei der weiteren Rechnung setze man die auftretenden Tensorkomponenten stets für den Punkt $P_0 \equiv (x_1 = r,\ x_2 = x_3 = 0)$ an. Aus (117) und (91) folgt dann wegen (67), (68) und (45) für die transformierte Maxwellsche Wirkungsdichte:

(120) $$\mathfrak{u} = -\frac{r^2\varphi'^2}{2hq};$$

also sind ihre Lagrangeschen Ableitungen:

(121) $$\begin{cases} L_\varphi(\mathfrak{u}) = -\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial \varphi'}\right), \\ L_h(\mathfrak{u}) = \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial h}, \\ L_q(\mathfrak{u}) = \dfrac{\partial \mathfrak{u}}{\partial q}. \end{cases}$$

Für die transformierte Wirkungsdichte $\mathfrak{U}_1$ ergibt sich aus (117) und (114) in Rücksicht auf (59), (62) und (45).

$$(122)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{U}_1 = {} & \frac{q r^2}{h^2}\left([R_{11}] + \frac{h^2\varphi^2}{2q^2}\right)^2 + 2 h q r^2 \cdot \left([R_{22}] + \frac{\varphi^2}{2q^2}\right)^2 \\ & + \frac{h r^2}{q^2} R_{00}^2 - \frac{3 r^2}{h q}\left(\frac{q'}{q}\varphi - \frac{\varphi'}{2}\right)^2, \end{aligned}\right.$$

wobei $[R_{11}]$, $[R_{22}]$ und R_{00} durch (61) gegeben sind; ihre Lagrangeschen Ableitungen haben daher folgende Gestalt:

$$(123)\qquad \left\{\begin{aligned} L_\varphi(\mathfrak{U}_1) &= \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial \varphi} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial \varphi'}\right), \\ L_h(\mathfrak{U}_1) &= \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial h} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial h'}\right), \\ L_q(\mathfrak{U}_1) &= \frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial q} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial q'}\right) + \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_1}{\partial q''}\right). \end{aligned}\right.$$

Endlich liefert (117) und (114) für die transformierte Wirkungsdichte $\mathfrak{U}_2$ wegen (64) und (45) folgenden Ausdruck:

$$(124)\qquad \mathfrak{U}_2 = h q r^2 \left(R - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{q^2}\right)^2,$$

wo R durch (63) bestimmt ist; die zugehörigen Lagrangeschen Ableitungen nehmen also die Form an:

$$(125)\qquad \left\{\begin{aligned} L_\varphi(\mathfrak{U}_2) &= \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial \varphi}, \\ L_h(\mathfrak{U}_2) &= \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial h} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial h'}\right), \\ L_q(\mathfrak{U}_2) &= \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial q} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial q'}\right) + \frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial q''}\right). \end{aligned}\right.$$

Jetzt muß man dazu übergehen, die neun Lagrangeschen Ableitungen von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ wirklich auszurechnen.

Sehr leicht ergeben sich aus (120) und (121) die Ableitungen von $\mathfrak{u}$:

$$(126)\qquad \left\{\begin{aligned} L_\varphi(\mathfrak{u}) &= \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varphi'}{hq}\right) = \frac{r^2}{hq}\cdot\varphi'' + \frac{2r}{hq}\cdot\varphi' - \frac{r^2 h'}{h^2 q}\cdot\varphi' - \frac{r^2 q'}{h q^2}\cdot\varphi', \\ L_h(\mathfrak{u}) &= \frac{r^2}{2h^2 q}\cdot\varphi'^2, \\ L_q(\mathfrak{u}) &= \frac{r^2}{2hq^2}\cdot\varphi'^2. \end{aligned}\right.$$

Schwieriger lassen sich die Ableitungen von $\mathfrak{U}_2$:

$$(124\text{a})\qquad \mathfrak{U}_2 = h q r^2 Q^2$$

ermitteln. Man findet zuerst gemäß (125):

$$
(127)\quad \begin{cases}
L_\varphi(\mathfrak{U}_2) = -6\frac{hr^2}{q}\varphi Q, \\
L_h(\mathfrak{U}_2) = qr^2Q^2 + 2hqr^2Q\frac{\partial Q}{\partial h} - \frac{d}{dr}\left(2hqr^2Q\frac{\partial Q}{\partial h'}\right), \\
L_q(\mathfrak{U}_2) = hr^2Q^2 + 2hqr^2Q\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{d}{dr}\left(2hqr^2Q\frac{\partial Q}{\partial q'}\right) \\
\qquad + \frac{d^2}{dr^2}\left(2hqr^2Q\frac{\partial Q}{\partial q''}\right).
\end{cases}
$$

Die weitere Ausrechnung läßt sich nun aus einem besonderen Grunde sehr vereinfachen. Aus der allgemeinen (97) entsprechenden elektromagnetischen Feldgleichung folgt nämlich bei Benutzung der Wirkungsfunktionen Q^2 und $Q_{ik}Q^{ik}$ neben l, wie sie in (112) auftreten, daß im *statischen* Felde, das ja schon von selbst geeicht ist[37]), Q auch *räumlich*, nicht nur zeitlich, konstant sein muß, daß die Eichung also dort die sogenannte natürliche ist[38]). Demgemäß gilt bei Kugelsymmetrie:

$$
(128)\qquad \frac{dQ}{dr} = 0, \quad Q = \lambda,
$$

wo λ eine Konstante ist. Berücksichtigt man diesen Umstand, so erhält man einfacher:

$$
(129)\quad \begin{cases}
\frac{1}{\lambda}L_\varphi(\mathfrak{U}_2) = -6\frac{hr^2}{q}\cdot\varphi, \\
\frac{1}{\lambda}L_h(\mathfrak{U}_2) = \lambda qr^2 + 2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial h} - \frac{d}{dr}\left(2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial h'}\right), \\
\frac{1}{\lambda}L_q(\mathfrak{U}_2) = \lambda hr^2 + 2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{d}{dr}\left(2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial q'}\right) + \frac{d^2}{dr^2}\left(2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial q''}\right).
\end{cases}
$$

Man rechne nun nach (63) und (64) aus und beachte, daß

$$
\frac{d}{dr}\left(2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial q''}\right) = 2hqr^2\frac{\partial Q}{\partial q'}
$$

ist, so daß in $L_q(\mathfrak{U}_2)$ die letzten beiden Glieder wegfallen; so ergibt sich schließlich:

$$
(130)\quad \begin{cases}
\frac{1}{\lambda}L_\varphi(\mathfrak{U}_2) = -6\frac{hr^2}{q}\cdot\varphi, \\
\frac{1}{\lambda}L_h(\mathfrak{U}_2) = \lambda qr^2 - 4\frac{q''r^2}{h^2} + 4\frac{h'q'r^2}{h^3} + 8\frac{h'qr}{h^3}, \\
\frac{1}{\lambda}L_q(\mathfrak{U}_2) = \lambda hr^2 - 4\frac{q''r^2}{hq} - 8\frac{rq'}{hq} + 4\frac{h'q'r^2}{h^2q} + 6\frac{hr^2}{q^2}\varphi^2.
\end{cases}
$$

---

[37]) Vgl. H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie"; 3. Aufl., S. 245.

[38]) W. Pauli, a. a. O., Gl. (31); H. Weyl, Berl. Ber., a. a. O., S. 477, u. Ann. d. Phys., a. a. O., S. 124.

Hierzu tritt gemäß (128) die Gleichung $Q = \lambda$, d. i.:

$$
(131)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{q''}{h^2 q} + 4\dfrac{q'}{r h^2 q} - 2\dfrac{h' q'}{h^3 q} - 4\dfrac{h'}{r h^3} \\[2ex] -\dfrac{2}{r^2} + \dfrac{2}{r^2 h^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\varphi^2}{q^2} - \lambda = 0. \end{cases}
$$

Mit ihrer Hilfe kann man noch die zweite Ableitung q'' aus $L_h(\mathfrak{U}_2)$ und $L_q(\mathfrak{U}_2)$ beseitigen[39]).

Am umständlichsten ist die Berechnung der Lagrangeschen Ableitungen von $\mathfrak{U}_1$. Man stelle zuerst das durch (122) bestimmte $\mathfrak{U}_1$ mittels (61) völlig entwickelt dar, weil dieses Verfahren hier am zweckmäßigsten ist; so bekommt man:

$$
(132)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = 6\dfrac{q h'^2}{h^3} + 2\dfrac{r^2 h'^2 q'^2}{h^5 q} + 2\dfrac{r^2 q''^2}{h^3 q} + 4\dfrac{r h'^2 q'}{h^5} - 4\dfrac{r h' q''}{h^4} \\[2ex] \quad - 4\dfrac{r^2 h' q' q''}{h^4 q} + 6\dfrac{q'^2}{h^3 q} - 4\dfrac{h' q'}{h^4} - 4\dfrac{r h' q'^2}{h^4 q} + 4\dfrac{r q' q''}{h^3 q} + 4\dfrac{q h'}{r h^2} \\[2ex] \quad - 4\dfrac{q h'}{r h^4} - 4\dfrac{q'}{r h} + 4\dfrac{q'}{r h^3} + 2\dfrac{h q}{r^2} + 2\dfrac{q}{r^2 h^3} - 4\dfrac{q}{r^2 h} + \dfrac{3 h r^2}{4 q^3}\cdot\varphi^4 \\[2ex] \quad + \left(4\dfrac{r h'}{h^3 q} - 2\dfrac{r q'}{h q^2} + \dfrac{r^2 h' q'}{h^2 q^2} - 2\dfrac{r^2 q'^2}{h q^3} - \dfrac{r^2 q''}{h q^2} + 2\dfrac{h}{q} - \dfrac{2}{h q}\right)\cdot\varphi^2 \\[2ex] \quad + 2\dfrac{r^2 q'}{h q^2}\cdot\varphi\varphi' - \dfrac{r^2}{2 h q}\cdot\varphi'^2. \end{cases}
$$

Hieraus findet man gemäß (123) folgenden Ausdruck für $L_\varphi(\mathfrak{U}_1)$:

$$
(133)\qquad \begin{cases} L_\varphi(\mathfrak{U}_1) = \dfrac{r^2}{h q}\cdot\varphi'' - \dfrac{r}{h q}\cdot\left(r\dfrac{h'}{h} + r\dfrac{q'}{q} - 2\right)\cdot\varphi' + \dfrac{4}{h q}\cdot\left(2 r\dfrac{h'}{h}\right. \\[2ex] \qquad \left. + r^2\dfrac{h' q'}{h q} - 2 r\dfrac{q'}{q} - r^2\dfrac{q''}{q} + h^2 - 1\right)\cdot\varphi + 3 r^2\dfrac{h}{q^3}\cdot\varphi^3. \end{cases}
$$

Entfernt man hier q'' mittels (131), so erhält man weiter:

$$
(134)\qquad L_\varphi(\mathfrak{U}_1) = \frac{r^2}{h q}\cdot\varphi'' - \frac{r}{h q}\left(r\frac{h'}{h} + r\frac{q'}{q} - 2\right)\cdot\varphi' - 2\lambda\frac{r^2 h}{q}\cdot\varphi.
$$

Gemäß (126) und (130) geht dieser Ausdruck über in:

$$
(135)\qquad L_\varphi(\mathfrak{U}_1) = L_\varphi(\mathfrak{u}) + \frac{1}{3} L_\varphi(\mathfrak{U}_2).
$$

Bei der elektromagnetischen Gleichung des Materieteilchens führt also ie Hinzunahme der Wirkungsfunktion $\mathfrak{U}_1$ zu keiner allgemeineren Form

39) Die Ausdrücke (130) sind mit den von Weyl und Pauli aufgestellten gleichwertig, aber in der Gestalt wegen des abweichenden Ganges der Ableitung z. T. erheblich verschieden. Insbesondere stimmt (130_1) mit Paulis Gleichung (60a), (130_3) mit (60c) und (130_2) mit einer Kombination von (60b), (60c) und (60d) überein, wobei noch (131) zu berücksichtigen ist.

als bei Benutzung von $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{u}$ allein, wie bereits aus der allgemeinen Theorie bekannt[40]). Dieses besondere Verhalten findet bei den beiden Gravitationsgleichungen nicht statt.

Endlich findet man aus (132) gemäß (123) nach freilich etwas längerer Zwischenrechnung für die beiden letzten Lagrangeschen Ableitungen $L_h(\mathfrak{U}_1)$ und $L_q(\mathfrak{U}_1)$ die folgenden Ausdrücke:

$$(136)\quad \begin{cases} L_h(\mathfrak{U}_1) = 30\,\dfrac{qh'^2}{h^6} + 10\,\dfrac{r^2h'^2q'^2}{h^6 q} - 2\,\dfrac{r^2q''^2}{h^4 q} + 20\,\dfrac{rh'^2q'}{h^6} - 8\,\dfrac{rh'q''}{h^5} \\ \quad - 8\,\dfrac{r^2h'q'q''}{h^5 q} - 14\,\dfrac{q'^2}{h^4 q} - 20\,\dfrac{h'q'}{h^5} - 8\,\dfrac{rh'q'^2}{h^5 q} + 4\,\dfrac{rq'q''}{h^4 q} - 8\,\dfrac{q'}{rh^4} \\ \quad - 12\,\dfrac{qh''}{h^5} - 4\,\dfrac{r^2h''q'^2}{h^5 q} + 4\,\dfrac{r^2h'q'^3}{h^5 q^2} - 8\,\dfrac{rh''q'}{h^5} + 8\,\dfrac{q''}{h^4} + 4\,\dfrac{rq'''}{h^4} \\ \quad + 4\,\dfrac{r^2q'q'''}{h^4 q} - 4\,\dfrac{r^2q'^2q''}{h^4q^2} - 4\,\dfrac{rq'^3}{h^4q^2} + 2\,\dfrac{q}{r^2} - 10\,\dfrac{q}{r^2h^4} + 8\,\dfrac{q}{r^2h^2} \\ \quad + \dfrac{3r^2}{4q^2}\varphi^4 + 2\left(2\,\dfrac{rq'}{h^2q^2} + 2\,\dfrac{r^2q'^2}{h^2q^3} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{h^2q}\right)\cdot\varphi^2 \\ \quad - 4\left(2\,\dfrac{r}{h^2q} + \dfrac{r^2q'}{h^2q^2}\right)\cdot\varphi\varphi' + \dfrac{r^2}{2h^2q}\cdot\varphi'^2; \end{cases}$$

$$(137)\quad \begin{cases} L_q(\mathfrak{U}_1) = 12\,\dfrac{h'^2}{h^5} + 2\,\dfrac{r^2h'^2q'^2}{h^5q^2} - 6\,\dfrac{r^2q''^2}{h^3q^2} + 20\,\dfrac{r^2h'q'q''}{h^4q^2} - 2\,\dfrac{q'^2}{h^3q^2} \\ \quad + 20\,\dfrac{rh'q'^2}{h^4q^2} - 28\,\dfrac{rq'q''}{h^3q^2} + 8\,\dfrac{h'}{rh^4} + 72\,\dfrac{rh'^2q'}{h^5q} + 40\,\dfrac{r^2h'h''q'}{h^5q} \\ \quad + 60\,\dfrac{r^2h'^2q''}{h^5q} - 60\,\dfrac{r^2h'^3q'}{h^6q} + 40\,\dfrac{rh'h''}{h^5} - 60\,\dfrac{rh'^3}{h^6} - 60\,\dfrac{rh'q''}{h^4q} \\ \quad - 16\,\dfrac{r^2h''q''}{h^4q} - 24\,\dfrac{r^2h'q'''}{h^4q} + 12\,\dfrac{h'q'}{h^4q} - 20\,\dfrac{rh''q'}{h^4q} + 16\,\dfrac{rq'''}{h^3q} \\ \quad + 4\,\dfrac{r^2q^{\mathrm{IV}}}{h^3q} - 8\,\dfrac{r^2q'q'''}{h^3q^2} + 8\,\dfrac{r^2q'^2q''}{h^3q^3} - 4\,\dfrac{h''}{h^4} - 4\,\dfrac{rh'''}{h^4} - 4\,\dfrac{r^2h'''q'}{h^4q} \\ \quad + 8\,\dfrac{r^2h'q'^3}{h^4q^3} + 8\,\dfrac{rq'^3}{h^3q^3} + 2\,\dfrac{h}{r^2} + \dfrac{6}{r^2h^3} - \dfrac{8}{r^2h} - \dfrac{9hr^2}{4q^4}\varphi^4 \\ \quad + \left(-4\,\dfrac{rh'}{h^2q^2} + 16\,\dfrac{rq'}{hq^3} - 8\,\dfrac{r^2h'q'}{h^2q^3} - 12\,\dfrac{r^2q'^2}{hq^4} + 8\,\dfrac{r^2q''}{hq^3} - 2\,\dfrac{h}{q^2} \right. \\ \quad \left. + \dfrac{2}{hq^2}\right)\cdot\varphi^2 + \left(8\,\dfrac{r^2q'}{hq^3} - 8\,\dfrac{r}{hq^2} + 4\,\dfrac{r^2h'}{h^2q^2} + 8\,\dfrac{r^2q'}{hq^2}\right)\cdot\varphi\varphi' \\ \quad - \dfrac{7r^2}{2hq^2}\cdot\varphi'^2 - 4\,\dfrac{r^2}{hq^2}\cdot\varphi\varphi''. \end{cases}$$

Mit Hilfe von (131) kann man aus (136) die Ableitungen q'' und q''' sowie aus (137) die Ableitungen q'', q''' und q^{IV} entfernen.

---

[40]) W. Pauli, a. a. O., Gl. (29) und (30) sowie (20b).

Denkt man sich jetzt alle Lagrangeschen Ableitungen aus (126), (130), (135), (136) und (137) in die Feldgleichungen (119) eingesetzt so hat man die gewünschten drei Differentialgleichungen des Materieteilchens, die q, h und φ bestimmen; dabei hat man noch die Gleichung (131) zu berücksichtigen. Ziemlich einfach ist die erste dieser Feldgleichungen, die elektromagnetische, die folgendermaßen lautet:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2\varphi'}{hq}\right)=\frac{2\lambda(\alpha+3\beta)}{\alpha+1}\frac{r^2h}{q}\varphi. \tag{138}$$

Die anderen beiden Gleichungen sind dagegen offenbar äußerst verwickelt. Der Ansatz für das materielle Elementarteilchen ist daher hier von weit schwierigerer Art als in der im ersten Hauptteil angewandten abgeänderten Einsteinschen Theorie. Während in dieser eine Zurückführung auf eine einzelne Differentialgleichung möglich war, handelt es sich hier stets um ein verwickeltes System simultaner Gleichungen. Somit ist hier die Methode der Reihenentwicklung, auf die man allein angewiesen ist, weit schwieriger durchführbar. Eine Integration in geschlossener Form ist auch in dem Sonderfall $\alpha = 0$, den bereits, wie bemerkt, Weyl und Pauli behandelten, nicht gelungen.

Für die elektrische Dichte ϱ ergibt sich hier aus der allgemeinen Theorie[41]), daß sie zu dem elektrischen Potential φ proportional ist, eine Beziehung, die von der Gleichung (82), die in der abgeänderten Einsteinschen Theorie ϱ bestimmt, gänzlich verschieden ist.

Wollte man jetzt schließlich die neuen von Weyl im Jahre 1921 entwickelten Anschauungen über das Wesen der Materie heranziehen (siehe oben § 1), so wäre eine Untersuchung der aufgestellten Feldgleichungen auf die Stetigkeitseigenschaften ihrer Lösungen erforderlich. Da dies bei dem verwickelten Bau dieser Gleichungen in strenger Weise kaum möglich ist, so soll hierauf nicht weiter eingegangen werden. Bemerkt sei nur, daß die Gleichung (138) für $\alpha = 0$ ihre Form beibehält und sich daher an sie derselbe Gedankengang wie bei Weyl[42]) trotz der hier benutzten allgemeineren Wirkungsfunktion anschließen läßt[43]).

---

[41]) W. Pauli, a. a. O., Gl. (30).
[42]) H. Weyl, „Raum, Zeit, Materie"; 4. Aufl., 1921, S. 272 unten.
[43]) Vgl. hierzu die oben bei Gl. (135) gemachten Bemerkungen.

(Eingegangen am 27. 10. 1921.)

Schwingungsprobleme und Integralgleichungen.

Von

E. Trefftz in Dresden.

Behandelt man die einfachen Schwingungsprobleme, z. B. das Problem der schwingenden Saite oder des schwingenden Stabes, mit der Methode der Integralgleichungen, so erhält man in einfacher Weise außer dem Existenzbeweise für die Eigenschwingungen den Satz über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen mit der Einschränkung, daß für die zu entwickelnde Funktion bei der schwingenden Saite zweimalige, beim schwingenden Stabe viermalige Differenzierbarkeit gefordert wird. Im folgenden gebe ich einen einfachen Beweis dafür, daß von den zu entwickelnden Funktionen im Falle der schwingenden Saite nur für den ersten und im Falle des schwingenden Stabes nur für den zweiten Differentialquotienten quadratische Integrabilität gefordert zu werden braucht. Außerdem ergibt sich dabei der Konvergenzbeweis für die bilineare Entwicklung des Kernes nach den Eigenfunktionen; da es sich um Kerne von positivem Typus handelt, ist dies letzte Resultat nur eine Bestätigung eines bekannten Ergebnisses von Mercer[1]), der allgemein für Kerne von positivem Typus die Konvergenz der bilinearen Entwicklung bewiesen hat.

1. **Die Integralgleichung der Eigenfunktionen.** Es sei gestattet, Bekanntes kurz zu wiederholen. Wir bezeichnen mit $E(s, t)$ die Entfernung aus der Gleichgewichtslage, welche an der Stelle s entsteht, wenn an der Stelle t eine Kraft vom Betrage 1 wirkt. Dann erhalten wir nach dem d'Alembertschen Prinzip die Ausschwingung $Y(s, \tau)$ an der Stelle s zur Zeit τ, indem wir an jeder Stelle t die Trägheitskräfte $-\mu(t)\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}$ anbringen (wo $\mu(t)$ die Masse des schwingenden Stabes oder der Saite

[1]) Mercer, Phil. Trans. 209 (1909) A, S. 415.

pro Längeninhalt an der betreffenden Stelle bedeutet) und durch Integration die Einflüsse auf die Stelle s summieren

$$Y(s,\tau) = -\int_0^l E(s,t)\mu(t)\frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2}dt.$$

Machen wir den gewohnten Ansatz $Y(s,\tau) = y(s)\cdot\cos\nu\tau$, so ergibt sich für die Schwingungsfigur die Integralgleichung

$$y(s) = \nu^2\int_0^l E(s,t)\mu(t)y(t)dt$$

(l = Länge der schwingenden Saite oder des Stabes).

Die Einflußfunktion $E(s,t)$ ist symmetrisch; bringen wir nämlich an der Stelle s eine Last P_s und an der Stelle t eine Last P_t auf das System, und sind $y(s)$ und $y(t)$ die bei s und t dadurch hervorgerufenen Durchbiegungen, so ändern sich $y(s)$ und $y(t)$ um $\delta y(s) = E(s,t)\delta P_t$ und $\delta y(t) = E(t,t)\delta P_t$, wenn P_t um δP_t vergrößert wird. Dabei wächst die Verzerrungsenergie um die hierbei geleistete Arbeit

$$\delta V = E(s,t)\delta P_t P_s + E(t,t)\delta P_t P_t.$$

Es ist also

$$\frac{\partial V}{\partial P_t} = E(s,t)P_s + E(t,t)P_t,$$

das heißt

$$E(s,t) = \frac{\partial^2 V}{\partial P_s \partial P_t} = E(t,s).$$

Die Integralgleichung wird in bekannter Weise symmetrisiert, indem $K(s,t) = \sqrt{\mu(s)}\cdot\sqrt{\mu(t)}\cdot E(s,t)$ und $\varphi(s) = \sqrt{\mu(s)}\cdot y(s)$ gesetzt wird. Aus der Symmetrie folgt die Existenz der Eigenwerte und der Eigenfunktionen. Entwickelbar nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ ist nach den Sätzen von Erhard Schmidt[2]) jede Funktion, welche durch eine quadratisch integrable Funktion $g(t)$ in der Form $f(s) = \int_0^l K(s,t)\cdot g(t)\cdot dt$ darstellbar ist. Die mechanische Bedeutung dieser Bedingung erhalten wir, wenn wir sie folgendermaßen schreiben:

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \int_0^l E(s,t)\sqrt{\mu(t)}g(t)dt,$$

d. h. es muß eine Verteilung von Kräften $\sqrt{\mu(t)}g(t)$ pro Längeneinheit geben, welche als Deformationsfigur gerade die Funktion $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ ergibt.

---

[2]) E. Schmidt, Über die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgegebener. Math. Ann. 63.

Da die Kräfte, welche eine vorgegebene Deformation erzeugen, durch den zweiten Differentialquotienten bei der schwingenden Saite und durch den vierten beim schwingenden Stabe gegeben sind, so folgt, daß der zweite bzw. vierte Differentialquotient des Quotienten $f(s)/\sqrt{\mu(s)}$ quadratisch integrabel sein muß, wenn das Schmidtsche Kriterium erfüllt sein soll.

Der Grundgedanke, der zur Einschränkung dieser Bedingungen führt, ist der, den Kern der obigen Integralgleichungen zu zerlegen, so daß er in der Form:

$$K(s,t)=\int_0^l G(s,r)\cdot G(t,r)\cdot dr$$

aus einem unsymmetrischen Kerne $G(s,t)$ erzeugt erscheint.

2. **Die Zerlegung des Kernes für die Integralgleichung der schwingenden Saite.** Bei der schwingenden Saite, die in den Endpunkten $s=0$ und $s=l$ befestigt sei, setzt sich die Einflußfunktion $E(s,t)$ einfach aus zwei linearen Stücken zusammen, die für $s=0$ und $s=l$ verschwinden und bei $s=t$ so aneinander gefügt sind, daß der Differentialquotient einen von t unabhängigen Sprung erleidet, dessen Betrag wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich -1 setzen können. Der Differentialquotient $\frac{\partial E(s,t)}{\partial s}$ ist also stückweise konstant; es ist für $s<t$ $\frac{\partial E(s,t)}{\partial s}=\frac{\partial E(t-0,t)}{\partial s}$ für $s>t$ $\frac{\partial E(s,t)}{\partial s}=\frac{\partial E(t+0,t)}{\partial s}$ und $\frac{\partial E(t-0,t)}{\partial s}-\frac{\partial E(t+0,t)}{\partial s}=1$.

Daraus folgt bei Berücksichtigung der Randbedingungen $E(0,t)=0$ und $E(l,t)=0$

$$E(s,t)=\int_0^l \frac{\partial E(r,s)}{\partial r}\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}\,dr=\int_0^l \frac{\partial E(s,r)}{\partial r}\cdot\frac{\partial E(t,r)}{\partial r}\,dr$$

und

$$K(s,t)=\int_0^l \sqrt{\mu(s)}\,\frac{\partial E(s,r)}{\partial r}\,\sqrt{\mu(t)}\,\frac{\partial E(t,r)}{\partial r}\,dr.$$

Setzen wir also:

$$G(s,r)=\sqrt{\mu(s)}\,\frac{\partial E(s,r)}{\partial r}$$

so ist

$$K(s,t)=\int_0^l G(s,r)\,G(t,r)\,dr.$$

Der Kern $G(s,t)$ ist unsymmetrisch; bezeichnen wir mit $\varphi_n(s)$ und $\psi_n(s)$ das System der zu diesem Kern gehörenden adjungierten Schmidtschen Eigenfunktionen, so sind die Funktionen $\varphi_n(s)$ identisch mit den Eigenfunktionen des Kernes $K(s,t)$, und nach den Entwicklungssätzen von

Schmidt lassen sich alle diejenigen Funktionen nach den $\varphi_n(s)$ absolut und gleichmäßig konvergent entwickeln, die sich durch eine quadratisch integrable Funktion $q(r)$ in der Form $\int\limits_0^l G(s,r)q(r)\,dr$ darstellen lassen. Diese Bedingung schreiben wir analog wie oben

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \int\limits_0^l \frac{\partial E(r,s)}{\partial r} q(r)\,dr\,.$$

Erfüllt $f(s)$ die Randbedingungen $f=0$ für $s=0$ und $s=l$, so wird diese Gleichung mit $q(s) = \frac{d}{ds}\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ erfüllt. Damit ist die Konvergenz der Entwicklung bewiesen unter der Bedingung, daß die Funktion $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ einen quadratisch integrablen ersten Differentialquotienten besitzt.

Aus der Zerlegung des Kernes folgt ohne weiteres die Positivität der Eigenwerte ν_n^2, die man gewöhnlich aus der physikalischen Tatsache der Positivität der Deformationsenergie ableitet.

Ferner können wir aus der Darstellungsform

$$K(s,t) = \int\limits_0^l G(s,r)G(t,r)\,dr$$

direkt auf die Konvergenz der bilinearen Entwicklung des Kernes

$$K(s,t) = \sum \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\nu_n^2}$$

schließen. Zunächst folgt aus dem eben benutzten Schmidtschen Entwicklungssatze nur die gleichmäßige Konvergenz in t bei festem s bzw., wegen der Symmetrie, in s bei festem t. Man kann aber nach dem Vorgange von Mercer (Seite 440 der in Fußnote [1]) zitierten Arbeit) hieraus in folgender Weise auf die gleichmäßige Konvergenz in s *und* t schließen: zunächst folgt aus einem Satze von Dini[3]), daß die Reihe $K(s,s) = \sum \frac{\varphi_n^2(s)}{\nu_n^2}$[4]) als eine Reihe positiver, stetiger Funktionen, welche eine stetige Funktion darstellt, in dem Intervall $0 - l$ mit Einschluß der Grenzen gleichmäßig konvergiert. Dann folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum \frac{\varphi_n(s)\,\varphi_n(t)}{\nu_n^2}$ direkt aus der Ungleichung $\varphi_n(s)\varphi_n(t) \leqq \frac{1}{2}\varphi_n^2(s) + \frac{1}{2}\varphi_n^2(t)$.

---

[3]) Dini-Lüroth, Grundlagen der Theorie der Funktionen einer reellen Variablen. § 99.

[4]) Bei unstetiger Massenverteilung $\sqrt{\mu(s)}$ betrachtet man statt $K(s,t)$ die Einflußfunktion $E(s,t) = \sum \frac{y_n(s)\,y_n(t)}{\nu_n^2}$.

3. **Zerlegung des Kernes für die Integralgleichung des schwingenden Stabes.** Zur Zerlegung des Kernes in der Integralgleichung des schwingenden Balkens führen wir außer der Einflußfunktion für die Durchbiegungen $E(s,t)$ noch ein: die Momenten-Einflußfunktion $M(s,t)$ und die Querkrafts-Einflußfunktion $Q(s,t)$, welche die von der im Punkte t wirkenden Last 1 hervorgerufenen Momente bzw. Querkräfte darstellen. Für die drei Einflußfunktionen gelten die Gleichungen

$$EJ\frac{\partial^2 E(s,t)}{\partial s^2} = -M(s,t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial M(s,t)}{\partial s} = Q(s,t),\text{[5]}$$

außerdem haben wir die gleichen Randbedingungen wie für die Eigenfunktionen, nämlich

beim freigelagerten Balken

$$\text{für } s=0 \quad E(0,t)=0 \quad \text{und} \quad M(0,t)=0,$$
$$\text{für } s=l \quad E(l,t)=0 \quad \text{und} \quad M(l,t)=0,$$

beim beiderseits eingespannten Balken

$$\text{für } s=0 \quad E(0,t)=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E(0,t)}{\partial s}=0,$$
$$\text{für } s=l \quad E(l,t)=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E(l,t)}{\partial s}=0,$$

an einem freien Balkenende $s=l$ $Q(l,t)=0$ und $M(l,t)=0$.

Berücksichtigen wir nun, daß die Querkraft, welche eine bei t wirkende Last 1 hervorruft, von 0 bis t konstant ist, bei t einen Sprung vom Betrage -1 hat, und von da an wieder bis l konstant bleibt, d. h. daß

$$\begin{aligned} &\text{für } s<t && Q(s,t)=Q(0,t),\\ &\text{für } s>t && Q(s,t)=Q(l,t)\\ &\text{und} && Q(0,t)-Q(l,t)=1 \end{aligned}$$

ist, so folgt:

$$\int_0^l Q(r,s)\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}dr = Q(0,s)\{E(s,t)-E(0,t)\} + Q(l,s)\{E(l,t)-E(s,t)\}.$$

Nach den Randbedingungen wird nun an den Enden entweder E oder Q zu Null, es folgt also:

$$E(s,t)=\int_0^l Q(r,s)\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}dr.$$

---

[5]) Wir bezeichnen durch E ohne Index den Elastizitätsmodul des Materials; eine Verwechslung mit der Funktion $E(s,t)$ ist wohl nicht zu befürchten.

Führen wir hier eine partielle Integration aus $\left(Q(r,t) = \frac{\partial M(r,t)}{\partial r}\right)$:

$$E(s,t) = M(r,s)\frac{\partial E(r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=0}^{r=l} - \int_0^l M(r,s)\frac{\partial^2 E(r,t)}{\partial r^2}\,dr,$$

so fällt wegen der Randbedingungen das erste Glied der rechten Seite fort, da an den Grenzen entweder M oder $\frac{\partial E}{\partial r}$ verschwindet, und unter dem Integral ist der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 E(r,t)}{\partial r^2} = -M(r,t)/EJ(r),$$

so daß wir schließlich

$$E(s,t) = \int_0^l \frac{M(r,s)\,M(r,t)}{E \cdot J(r)}\,dr$$

erhalten.

Setzen wir jetzt

$$G(s,r) = \sqrt{\mu(s)}\,\frac{M(r,s)}{\sqrt{E \cdot J(r)}},$$

so haben wir die gesuchte Zerlegung von $K(s,t)$ gefunden

$$K(s,t) = \int_0^l G(s,r)\,G(t,r)\,dr.$$

Die übrigen Schlüsse bleiben die gleichen wie oben. Zunächst folgt aus der Zerlegung, daß die Eigenwerte positiv sind; dann folgt die Konvergenz der bilinearen Entwicklung des Kernes. Was die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen angeht, so ist die Bedingung für gleichmäßige und absolute Konvergenz die Darstellbarkeit in der Form

$$f(s) = \int_0^l G(s,r)\,q(r)\,dr$$

durch eine quadratisch integrable Funktion $q(r)$.

Das schreiben wir

$$\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = \int_0^l M(r,s)\,\frac{q(r)}{\sqrt{EJ(r)}}\,dr.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir $\frac{q(r)}{\sqrt{EJ(r)}} = -\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{f(r)}{\sqrt{\mu(r)}}\right)$ setzen, wie man erkennt, wenn man die partiellen Integrationen rückwärts ausführt, die oben zur Zerlegung des Kernes führten, und dabei berücksichtigt, daß wir von den zu entwickelnden Funktionen die Erfüllung der gleichen Randbedingungen verlangen müssen wie von den Eigenfunktionen.

Es ergibt sich also das Resultat: Eine den Randbedingungen genügende Funktion $f(s)$ läßt sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(s)$ entwickeln, wenn der Quotient $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ einen quadratisch integrablen zweiten Differentialquotienten besitzt.

Damit sind die Entwicklungssätze in dem gewünschten Umfange bewiesen. Die in dem Nenner stehende $\sqrt{\mu(s)}$ fällt in den Konvergenzkriterien fort, wenn wir von den $\varphi_n(s)$ zu den $y_n(s)$ zurückkehren. Haben wir eine Funktion $F(s)$, welche die Anfangslage des schwingenden Systems angibt, nach den $y_n(s)$ zu entwickeln

$$F(s) = \sum a_n y_n(s),$$

so erhalten wir die Koeffizienten a_n, indem wir die Funktion $f(s) = F(s)\sqrt{\mu(s)}$ nach den Funktionen $\varphi_n(s)$ entwickeln:

$$f(s) = F(s)\sqrt{\mu(s)} = \sum a_n \varphi_n(s) = \sum a_n y_n(s)\sqrt{\mu(s)}$$

und dann durch $\sqrt{\mu(s)}$ dividieren. Die Konvergenzbedingungen, welche für $\frac{f(s)}{\sqrt{\mu(s)}}$ quadratische Integrabilität des ersten bzw. zweiten Differentialquotienten fordern, werden dann für $F(s)$ einfach zur Forderung der quadratischen Integrabilität des ersten Differentialquotienten bei der schwingenden Saite und des zweiten bei dem schwingenden Stabe, wozu noch die notwendige Erfüllung der Randbedingungen hinzutritt.

Damit ist das in der Einleitung Behauptete vollständig bewiesen.

4. **Mechanische Bedeutung der Konvergenzkriterien.** Die Konvergenzbedingung hat eine einfache mechanische Bedeutung. Ist $y = F(s)$ die Anfangslage, von der aus die Schwingung beginnt, so st die Deformationsarbeit, welche nötig ist, um diese Anfangslage zu erzeugen, bei der schwingenden Saite $\frac{1}{2} T \cdot \int\limits_0^l y'^2 \cdot ds$ (T = Spannung der Saite), beim schwingenden Stabe $\frac{1}{2}\int\limits_0^l E \cdot J \cdot y''^2 \cdot ds$. Wir sehen also, daß die Forderung nach der quadratischen Integrierbarkeit des ersten bzw. zweiten Differentialquotienten physikalisch mit der Bedingung endlicher Deformationsenergie der Ausgangslage identisch ist.

Wird dem schwingenden System noch eine Anfangsgeschwindigkeit $g(s)$ erteilt, so stellen wir den davon herrührenden Teil der Schwingung durch eine Reihe $\sum\limits_1^\infty b_n \cdot y_n(s) \cdot \sin \nu_n \tau$ dar. Hier sind die Koeffizienten

$$b_n = \frac{\int\limits_0^l \sqrt{\mu(s)}\, g(s)\, \varphi_n(s)\, ds}{\nu_n},$$

d. h. sie sind gleich den nach Fourier-Art gebildeten Koeffizienten von $\sqrt{\mu(s)}\,g(s)$ dividiert durch die Eigenwerte ν_n. Daß die so gebildete Reihe absolut und gleichmäßig konvergiert, wenn die Funktion $g(s)$ quadratisch integrabel ist, folgt aus dem Hilfssatz, der in der Einleitung der zitierten Arbeit von E. Schmidt bewiesen wird; man kann diesen Satz so aussprechen: Sind α_n die Fourierkoeffizienten $\alpha_n = \int\limits_0^l \gamma(s)\,\varphi_n(s)\,ds$ einer quadratisch integrablen Funktion, so konvergiert die Reihe $\sum \frac{\alpha_n \varphi_n(s)}{\nu_n}$ absolut und gleichmäßig. Die $\varphi_n(s)$ sind dabei die Eigenfunktionen, die ν_n die zugehörigen Eigenwerte zu einem symmetrischen oder unsymmetrischen Kern. In dieser Form bestätigt der Satz direkt die Behauptung über die Konvergenz der obigen Reihe. Nun ist aber die Forderung nach der quadratischen Integrabilität von $g(s)$ identisch mit der Bedingung, daß die kinetische Energie des Anfangszustandes endlich sein soll.

Wir können also das gesamte Resultat der Konvergenzuntersuchungen so aussprechen: Die Reihen

$$Y(s,\tau) = \sum a_n y_n(s) \cos \nu_n \tau + \sum b_n y_n(s) \sin \nu_n \tau$$

konvergieren in allen physikalisch realisierbaren Fällen (d. h. für alle mit endlichem Energieaufwand herstellbaren Anfangszustände) absolut und gleichmäßig.

Aachen, 16. Mai 1922.

(Eingegangen am 23. 5. 1922.)

Bemerkung zu einer Arbeit des Herrn K. Popoff.

Von

Ludwig Neder in Leipzig.

In der fraglichen Arbeit[1]) gibt Herr Popoff den Satz: Es sei $F(x)$ stetig für $0 \leqq x \leqq 1$; damit dann

(1) $\qquad f(x)$ existiert, quadratisch summierbar für $0 \leqq x \leqq 1$,

sowie

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{2}$$

ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(n - \tfrac{1}{2}\right) \pi \int_0^1 F(x) \sin\left(n - \tfrac{1}{2}\right) \pi x\, dx \right\}^2 \text{ konvergiert.} \tag{3}$$

Zum Beweise zieht Herr Popoff eine ganze Reihe von Sätzen aus der Theorie der Integralgleichungen heran. Jedoch ist sein Satz bereits eine unmittelbare Folge des bekannten Fischer-Rieszschen Satzes, von dem übrigens — wie Herr Popoff selbst bemerkt — auch sein Beweis ausgeht.

Betrachten wir zunächst den noch leichter sich ergebenden Satz: Bei obigem $F(x)$ ist für (1) in Verbindung mit

$$F(x) = C + \int_0^x f(x)\,dx \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{2'}$$

notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ n \int_0^1 F(x) \cos n \pi x\, dx \right\}^2 \text{ konvergiert.} \tag{3'}$$

Zum Beweise ergänzen wir $F(x)$ zu einer geraden Funktion der Periode 2, desgleichen $f(x)$ zu einer ungeraden Funktion. Dann ver-

[1]) Sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $F(x)$ puisse être mise sous la forme $\int_0^x f(x)\,dx$ où $f(x)$ est de carré intégrable [Math. Ann. 88 (1922), S. 154—157].

schwinden alle Fourierschen Sinuskoeffizienten B_n von F, während der Kosinuskoeffizient

(4) $$A_n = 2\int_0^1 F(x)\cos n\pi x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ferner besteht zwischen den Fourierkoeffizienten a_n, b_n von f und A_n^*, B_n^* von $\int_0^x f(x)dx$ wegen $a_0 = 0$ die Beziehung

(5) $$A_n^* = -\frac{b_n}{np},\quad B_n^* = \frac{a_n}{np} \quad (n = 1, 2, \ldots),\quad \text{wo } p = \pi \left(\text{nachher} = \frac{\pi}{2}\right);$$

und es ist für (1) und (2′) notwendig und hinreichend, daß die entsprechenden Beziehungen im Intervall $-1 \leqq x \leqq 1$ gelten. Für ersteres aber ist notwendig und hinreichend, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \text{ konvergiert,}$$

für letzteres, daß

$$A_n = A_n^*, \text{ also } = -\frac{b_n}{np},\quad B_n = B_n^*, \text{ also } = \frac{a_n}{np} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

wenn wir daher diese Gleichungen (nebst $a_0 = 0$) als Definition von a_n, b_n betrachten, so ergibt sich als notwendig und hinreichend die Bedingung, daß

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(A_n^2 + B_n^2) \text{ konvergiert,}$$

welche sich wegen (4) auf (3′) reduziert.

Um nunmehr auf analogem Wege einen Beweis des Popoffschen Satzes zu erhalten, ändere man $F(x)$ ab zu einer Funktion $F_0(x)$ der Periode 4 vermöge[2])

$$F_0(x) = F(x) \text{ für } 0 < x < 1,\quad F_0(x) = F_0(2 - x) = -F_0(-x),$$

desgleichen $f(x)$ zu einer Funktion $f_0(x)$ vermöge[2])

$$f_0(x) = f(x) \text{ für } 0 < x < 1,\quad f_0(x) = -f_0(2 - x) = f_0(-x).$$

Dann verschwinden alle A_n, B_n bis auf

(7) $$B_{2\nu-1} = 2\int_0^1 F(x)\sin(2\nu - 1)\frac{\pi}{2}x\,dx \quad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

ferner gilt (5) nebst $A_0^* = a_0 = 0$, und es ist für (1) und (2) notwendig und hinreichend, daß die entsprechenden Beziehungen im Intervall $[0, 4]$ bzw. in $(0,1) + (1,2) + (2,3) + (3,4)$ bestehen. Hierfür aber (Begründung wörtlich wie oben, da $A_0 = A_0^* = 0$ eo ipso gilt) muß sein und genügt wiederum (6), was sich diesmal wegen (7) auf (3) reduziert.

Leipzig, den 15. Juni 1922.

[2]) Auf die Werte in den Punkten 0, 1, 2, 3 kommt es nicht an.

(Eingegangen am 16. 6. 1922.)